서울대 수학박사들이 만든
인공지능 수학선생님

마타수학

개념기본서

수학(상)

Ⅲ도형의 방정식

10 평면좌표

정의 & 포인트 확인

- 수직선 위의 두 점 사이의 거리
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
- 중선정리

- 선분을 내분하는 점
- 선분을 외분하는 점
- 수직선 위의 선분을 내분하는 점
- 수직선 위의 선분을 외분하는 점
- 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점
- 좌표평면 위의 선분을 외분하는 점
- 삼각형의 무게중심

10-1 두 점 사이의 거리

수직선 위의 두 점 사이의 거리

수직선 위의 세 점 P(-1), Q(3), R(1)에 대하여

- 두 점 P(-1), Q(3) 사이의 거리는 $\overline{PQ}=3-(-1)=4$
- 두 점 Q(3), R(1) 사이의 거리는 $\overline{QR}=3-1=2$

이다. 일반화하면 수직선 위의 두 점을 각각 A(x_1), B(x_2)라 할 때, 두 점 A, B 사이의 거리는

- $x_1 \le x_2$이면 $\overline{AB}=x_2-x_1$
- $x_1 > x_2$이면 $\overline{AB}=x_1-x_2$

와 같다. 이를 절댓값(p.155)을 이용하여 표현하면 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$이다.

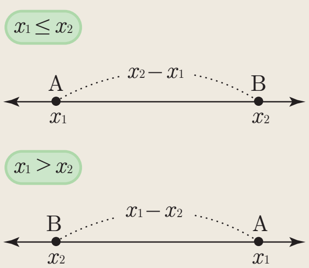


그림 10.1. 수직선 위의 두 점 사이의 거리

정 의 상 10.1 **수직선 위의 두 점 사이의 거리**

수직선 위의 두 점을 각각 A(x_1), B(x_2)라 하면 두 점 A, B 사이의 거리는 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$이다.

보기 10.1 수직선 위의 두 점 A(4), B(-1) 사이의 거리를 구하시오.

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 두 점 A, B 사이의 거리를 구할 수 있다. 왼쪽 그림과 같이 점 A(x_1, y_1)에서 x축에 평행한 선을 긋고, 점 B(x_2, y_2)에서 y축에 평행한 선을 그어 그 교점을 C라 하면, 점 C의 좌표는 (x_2, y_1)이다. 이때 $\overline{AC}=|x_2-x_1|$, $\overline{BC}=|y_2-y_1|$이다. 삼각형 ABC는 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

이다. 따라서 두 점 A, B 사이의 거리 $\overline{AB}$는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

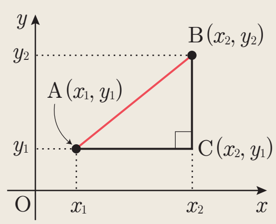


그림 10.2. 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

보기 정답

10.1 5

정 의 상 10.2 **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리**

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

예 시 좌표평면 위의 두 점 A(1, 1), B(2, 3) 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

이다.

원점 O(0, 0)과 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{OA}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$이다.

보기 10.2 다음 물음에 답하시오.

(1) 좌표평면 위의 점 A(1, 2)와 원점 O(0, 0) 사이의 거리를 구하시오.

(2) 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(2, 3) 사이의 거리를 구하시오.

중선정리

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 도형의 여러 가지 성질을 설명할 수 있다. 이 중 삼각형의 중선정리에 대해 알아보자.

중선
삼각형의 한 꼭짓점과 마주보는 변의 중점을 이은 선분

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

이 성립함을 좌표를 이용하여 확인해보자. 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점 M을 원점으로 하고, 직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자. 이때 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$으로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2+\overline{AC}^2&=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}\\&=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)\\&=2(a^2+b^2+c^2)\qquad\cdots(10.1.1)\end{aligned}$$

이다. 한편, $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=c^2$이므로

$$2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)=2(a^2+b^2+c^2)\qquad\cdots(10.1.2)$$

이다. (10.1.1), (10.1.2)로부터 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

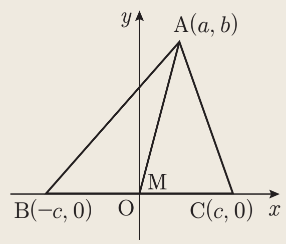


그림 10.3. 삼각형의 중선정리

포인트 상 10.3 **중선정리**

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

보기 정답

10.2 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{2}$

예제 01 다음 물음에 답하시오.

(1) 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ a)$, $B(a+2,\ 3)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$일 때, a의 값을 구하시오.

(2) 좌표평면 위의 두 점 $(1,\ 2)$, $(0,\ 5)$에서 같은 거리에 있고, x축 위에 있는 점의 좌표를 구하시오.

길잡이 (1) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다. 이 식을 이용하여 방정식을 풀 때에는 양변을 제곱하여 계산하면 된다.

(2) 좌표평면 위의 점 $P(a,\ b)$가 특정한 조건을 만족하는 경우, 이 조건을 이용하여 점 P의 좌표를 다음과 같이 놓으면 계산이 편리한다.

조건	x축 위	y축 위	직선 $y=x$ 위
P의 좌표	$(a,\ 0)$	$(0,\ b)$	$(a,\ a)$

• 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

풀 이

(1) 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(a+2-1)^2+(3-a)^2}=\sqrt{2a^2-4a+10}=2\sqrt{2}$$

이므로 양변을 제곱하면

$$2a^2-4a+10=8 \quad \Rightarrow \quad 2(a-1)^2=0$$

에서 $a=1$이다.

(2) 두 점 $(1,\ 2)$, $(0,\ 5)$를 각각 점 A, B라 하고 구하는 점을 점 P라 하자. 이때 점 P는 x축 위에 있으므로 $P(a,\ 0)$이라 놓을 수 있다. 두 점 A, B와 점 P 사이의 거리는 각각

$$\overline{AP}=\sqrt{(a-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{a^2-2a+5}$$
$$\overline{BP}=\sqrt{(a-0)^2+(0-5)^2}=\sqrt{a^2+25}$$

이고, $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$$\sqrt{a^2-2a+5}=\sqrt{a^2+25}$$

이다. 양변을 제곱하면

$$a^2-2a+5=a^2+25 \quad \Rightarrow \quad 2a+20=0$$

에서 $a=-10$이다. 따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-10,\ 0)$이다.

정답 (1) $a=1$ (2) $(-10,\ 0)$

돌다리 두드리기

좌표평면 위의 두 점 $P(1,\ 0)$, $Q(5,\ 3)$ 사이의 거리를 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| 5

두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(1-5)^2+(0-3)^2}=5$이다.

개념 그대로

유제 01-1

좌표평면 위의 두 점 $A(-3, 2)$, $B(1, 4)$에서 같은 거리에 있고, 직선 $y=x$ 위에 있는 점의 좌표를 구하시오.

구하는 점을 P라 하면 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $P(a, a)$라 놓을 수 있다.

$$\overline{AP}=\sqrt{(a+3)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2a^2+2a+13}$$

$$\overline{BP}=\sqrt{(a-1)^2+(a-4)^2}=\sqrt{2a^2-10a+17}$$

이고, $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$$\sqrt{2a^2+2a+13}=\sqrt{2a^2-10a+17}$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $12a=4$에서 $a=\frac{1}{3}$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$이다.

답 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

개념 그대로

유제 01-2

좌표평면 위의 세 점 $A(1, 0)$, $B(a, 4)$, $C(-4, 8)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$를 만족시키는 a의 값을 구하시오.

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(a-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{a^2-2a+17}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(-4-a)^2+(8-4)^2}=\sqrt{a^2+8a+32}$$

이다. $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$$\sqrt{a^2-2a+17}=\sqrt{a^2+8a+32}$$

이고, 양변을 제곱하여 정리하면 $10a=-15$에서 $a=-\frac{3}{2}$이다.

답 $-\frac{3}{2}$

개념 그대로

유제 01-3

좌표평면 위의 세 점 $A(2, -2)$, $B(1, 3)$, $C(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 구하시오.

외심을 $P(a, b)$라 놓으면 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같으므로

$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC} \quad \cdots ㉠$$

이고, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하면

$$\overline{PA}=\sqrt{(a-2)^2+(b+2)^2}$$

$$\overline{PB}=\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$$

$$\overline{PC}=\sqrt{(a-4)^2+b^2}$$

이다. ㉠은

$$\overline{PA}=\overline{PC} \Rightarrow a+b=2 \quad \cdots ㉡$$

$$\overline{PB}=\overline{PC} \Rightarrow a-b=1 \quad \cdots ㉢$$

이고, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이다. 따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

답 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

두 점 사이의 거리의 응용 1

예제 02 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 말하시오.

(1) $A(-1,\ 1)$, $B(5,\ -1)$, $C(1,\ 3)$

(2) $A(-2,\ 2)$, $B(-3,\ -5)$, $C(2,\ 0)$

길잡이 세 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 모양을 판정할 때에는 세 변의 길이를 구한 후 길이 사이의 관계를 파악한다.

- 세 변의 길이가 같으면 정삼각형
- 두 변의 길이가 같으면 이등변삼각형
- 피타고라스 정리를 만족하면 직각삼각형

풀 이

• 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

(1) 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표가 주어져 있으므로 삼각형의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(1-5)^2+(3+1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

이때 세 변의 길이가

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

을 만족하므로, 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

(2) 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표가 주어져 있으므로 삼각형의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3+2)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(2+3)^2+(0+5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

이때 두 변 AB, BC의 길이가

$$\overline{AB}=\overline{BC}$$

를 만족하므로, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

정답 (1) $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 (2) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형

돌다리 두드리기

좌표평면 위의 세 점 $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(1,\ \sqrt{3})$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

돌다리 두드리기

|답| 정삼각형

삼각형의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(0-0)^2}=2$, $\overline{BC}=\sqrt{(2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2$

에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

개념 그대로

유제 02-1

세 점 A(1, 1), B(3, 2), C(0, 3)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하시오.

삼각형의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(0-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(1-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

이고 세 변의 길이가

$$\overline{AB}=\overline{CA},\quad \overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$$

이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형이다.

답 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형

개념 그대로

유제 02-2

두 점 A(1, 2), B(3, 1)과 x축 위의 점 C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

점 C가 x축 위에 있으므로 점 C$(a, 0)$이라 하고, 변 AC와 변 BC의 길이를 구하면

$$\overline{AC}=\sqrt{(a-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{a^2-2a+5}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(a-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{a^2-6a+10}$$

이다. 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$$\sqrt{a^2-2a+5}=\sqrt{a^2-6a+10}$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $4a=5$에서 $a=\frac{5}{4}$이다. 따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이다.

답 $C\left(\frac{5}{4}, 0\right)$

개념 더하기

유제 02-3

+ 절댓값(p.155)

세 점 $A(a, a)$, $B(5, b)$, $C(7, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 두 양수 a, b의 값을 구하시오.

삼각형의 세 변 AB, BC, CA의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-a)^2+(b-a)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(a-5)^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(7-5)^2+(a-b)^2}=\sqrt{(a-b)^2+4}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(a-7)^2+(a-a)^2}=|a-7|$$

이다. 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$$

가 성립하고 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(a-b)^2+(a-5)^2=(a-b)^2+4 \quad\Rightarrow\quad (a-5)^2=4$$

에서 $a=3$ 또는 $a=7$이다.

(i) $a=3$일 때,

$$(3-b)^2+4=16 \quad\Rightarrow\quad b^2-6b-3=0$$

에서 b가 양수이므로 $b=3+2\sqrt{3}$이다.

(ii) $a=7$일 때,

$$(7-b)^2+4=0 \quad\Rightarrow\quad b^2-14b+53=0$$

이므로 만족하는 실수 b가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $a=3$, $b=3+2\sqrt{3}$이다.

답 $a=3$, $b=3+2\sqrt{3}$

예제 03 다음 물음에 답하시오.

(1) a, b가 실수일 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}$의 최솟값을 구하시오.

(2) 두 점 A$(3, -2)$, B$(1, 4)$과 좌표평면 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표와 그때의 최솟값을 구하시오.

길잡이 좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)이 주어진 경우 선분 AB의 길이는

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

와 같이 계산한다. 하지만 가끔은 식 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$을

좌표평면 위의 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 사이의 거리

와 같이 해석하는 것도 필요하다.

풀 이

• 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

(1) 주어진 식의 각 부분을

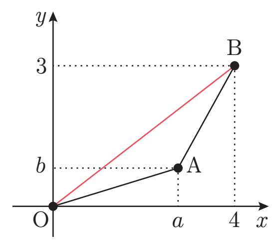
$\sqrt{a^2+b^2}$ $\Rightarrow$ 두 점 $(0, 0)$, (a, b) 사이의 거리

$\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}$ $\Rightarrow$ 두 점 $(4, 3)$, (a, b) 사이의 거리

와 같이 생각할 수 있다. 따라서 좌표평면 위의 세 점 A(a, b), B$(4, 3)$, O$(0, 0)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$$

의 최솟값을 구하면 된다.



$$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}\geq\overline{\mathrm{OB}}$$

이 성립하고, 점 A가 선분 OB 위에 있을 때 등호가 성립한다. 즉, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$가 되어 최소가 된다. 따라서 주어진 식의 최솟값은

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}\geq\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

(2) 점 P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2&=\left\{\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\right\}^2+\left\{\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}\right\}^2\\&=2x^2-8x+2y^2-4y+30\\&=2(x^2-4x)+2(y^2-2y)+30\\&=2(x-2)^2+2(y-1)^2+20\end{aligned}$$

이다. $(x-2)^2\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$이므로 $x=2$, $y=1$일 때 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최솟값 20을 가진다.

정답 (1) 5 (2) P$(2, 1)$, 최솟값: 20

돌다리 두드리기

a, b가 실수일 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}$의 최솟값을 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $\sqrt{5}$

원점 $(0, 0)$과 점 $(2, 1)$ 사이의 거리가 주어진 식의 최솟값이므로 구하는 값은 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이다.

정답 및 풀이 p.556

개념 그대로

유제 03-1

x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}$의 최솟값을 구하시오.

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x, y)$, $\mathrm{B}(-2, -1)$, $\mathrm{C}(4, 6)$에 대하여 주어진 식은

$$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}$$

이다. $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}\geq\overline{\mathrm{BC}}$가 성립하고, 점 A가 선분 BC 위에 있을 때 등호가 성립한다.
즉, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 되어 최소가 된다. 따라서 주어진 식의 최솟값은

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}\\&=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}\geq\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(4+2)^2+(6+1)^2}=\sqrt{85}\end{aligned}$$

에서 $\sqrt{85}$이다.

답 $\sqrt{85}$

개념 더하기

유제 03-2

+ 이차함수의 최대, 최소(p.203)

두 점 $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(3, 5)$와 직선 $y=x$ 위의 한 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2$의 최솟값을 구하시오.

직선 $y=x$ 위의 점 C의 좌표를 (a, a)라 하면

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\left\{\sqrt{(a-0)^2+(a-2)^2}\right\}^2=2a^2-4a+4$$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\left\{\sqrt{(a-3)^2+(a-5)^2}\right\}^2=2a^2-16a+34$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=4a^2-20a+38 \qquad \cdots ㉠$$

이다. ㉠은 a에 대한 이차함수이므로 표준형으로 변형하면

$$4a^2-20a+38=4\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+13$$

이므로 $a=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값 13을 갖는다. 따라서 구하는 최솟값은 13이다.

답 13

개념 그대로

유제 03-3

세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(4, 8)$, $\mathrm{B}(5, 10)$과 좌표평면 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소일 때, 점 P의 좌표와 그때의 최솟값을 구하시오.

점 P의 좌표를 (x, y)라 하고, $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 구하면

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2\\&=(x^2+y^2)+\{(x-4)^2+(y-8)^2\}+\{(x-5)^2+(y-10)^2\}\\&=3x^2-18x+3y^2-36y+205\\&=3(x-3)^2+3(y-6)^2+70\end{aligned}$$

이다. $(x-3)^2\geq0$, $(y-6)^2\geq0$이므로 $x=3$, $y=6$일 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최솟값 70을 가진다.

답 P(3, 6), 최솟값: 70

10-2 선분의 내분과 외분

선분의 내분과 외분

선분 AB 또는 그 연장선 위의 점 중에서 점 A와 점 B가 아닌 점을 선분 AB의 분점이라 한다.

선분을 내분하는 점

선분 AB 위에 점 P가 있을 때, 점 P는 선분 AB를 내분한다고 한다.

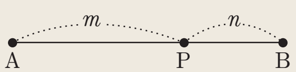


그림 10.4. 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P

정 의 상 10.4 **선분을 내분하는 점**

선분 AB 위의 한 점 P에 대하여

$$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n\ (m>0,\ n>0)$$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **내분**한다고 하고, 점 P를 선분 AB를 $m:n$으로 **내분하는 점**이라 한다. 특히, $m=n$일 때 점 P를 선분 AB의 **중점**이라 한다.

이때, 점 P를 선분 AB의 내분점이라고도 한다.

선분을 외분하는 점

선분 AB의 연장선 위에 점 Q가 있을 때, 점 Q는 선분 AB를 외분한다고 한다.

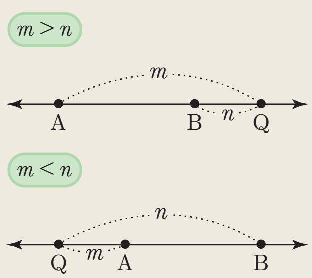


그림 10.5. 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q

정 의 상 10.5 **선분을 외분하는 점**

선분 AB의 연장선 위의 한 점 Q에 대하여

$$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 **외분**한다고 하고, 점 Q를 선분 AB를 $m:n$으로 **외분하는 점**이라 한다.

이때, 점 Q를 선분 AB의 외분점이라고도 한다.

수직선 위의 선분의 내분과 외분

수직선 위의 선분을 내분하는 점

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는 다음의 방법으로 구할 수 있다.

- $x_1<x<x_2$인 경우 $\overline{\mathrm{AP}}=x-x_1$, $\overline{\mathrm{BP}}=x_2-x$이다. $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$이므로

$$(x-x_1):(x_2-x)=m:n \quad \Rightarrow \quad m(x_2-x)=n(x-x_1)$$
$$\Rightarrow \quad mx_2-mx=nx-nx_1 \quad \Rightarrow \quad (m+n)x=mx_2+nx_1$$

  으로부터 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$이다.

- $x_2<x<x_1$인 경우 $\overline{\mathrm{AP}}=x_1-x$, $\overline{\mathrm{BP}}=x-x_2$이다. $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=m:n$이므로

$$(x_1-x):(x-x_2)=m:n \quad \Rightarrow \quad m(x-x_2)=n(x_1-x)$$
$$\Rightarrow \quad mx-mx_2=nx_1-nx \quad \Rightarrow \quad (m+n)x=mx_2+nx_1$$

  으로부터 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$이다.

선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1:1$로 내분하는 점이므로 $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$이다.

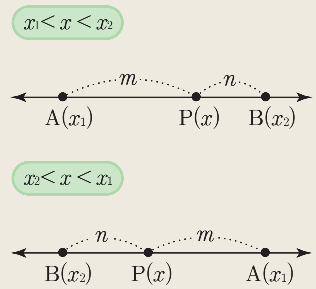


그림 10.6. 수직선 위의 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P

포인트 상 10.6 **수직선 위의 선분을 내분하는 점**

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여

- 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

- 선분 AB의 중점 M은

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

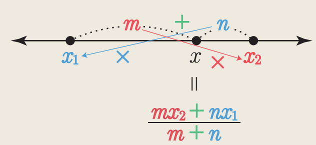


그림 10.7. 수직선 위의 선분을 내분하는 점의 좌표

예 시

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1)$, $\mathrm{B}(5)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는 $\dfrac{1\cdot5+2\cdot(-1)}{1+2}=1$에서 $\mathrm{P}(1)$이다.

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\dfrac{-1+5}{2}=2$에서 $\mathrm{M}(2)$이다.

보기 10.3 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-3)$, $\mathrm{B}(7)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.

보기 정답

10.3 $\mathrm{P}(1)$

수직선 위의 선분을 외분하는 점

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는 다음의 방법으로 구할 수 있다.

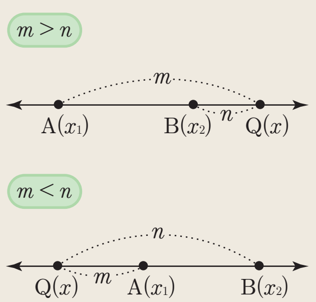


그림 10.8. 수직선 위의 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q

- $x_1<x_2$인 경우
  (i) $x_1<x_2<x$일 때, $\overline{AQ}=x-x_1$, $\overline{BQ}=x-x_2$이다. $\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$이므로
$$(x-x_1):(x-x_2)=m:n \quad\Rightarrow\quad m(x-x_2)=n(x-x_1)$$
$$\Rightarrow\quad mx-mx_2=nx-nx_1 \quad\Rightarrow\quad (m-n)x=mx_2-nx_1$$
  으로부터 $x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$이다.
  (ii) $x<x_1<x_2$일 때, $\overline{AQ}=x_1-x$, $\overline{BQ}=x_2-x$이다. $\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$이므로
$$(x_1-x):(x_2-x)=m:n \quad\Rightarrow\quad m(x_2-x)=n(x_1-x)$$
$$\Rightarrow\quad mx_2-mx=nx_1-nx \quad\Rightarrow\quad mx_2-nx_1=(m-n)x$$
  로부터 $x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$이다.
- $x_1>x_2$인 경우 점 Q가 선분 BA를 $n:m$으로 외분하는 점이라 생각하고 계산하면
$$x=\frac{nx_1-mx_2}{n-m}=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$
  으로 같은 결과를 얻을 수 있다.

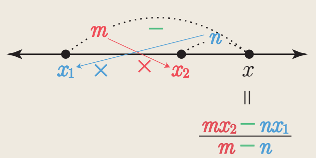


그림 10.9. 수직선 위의 선분을 외분하는 점의 좌표

포인트 상 10.7 **수직선 위의 선분을 외분하는 점**

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여
- 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q는
$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

예 시 수직선 위의 두 점 $A(-1)$, $B(4)$에 대하여
(1) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 P의 좌표는 $\dfrac{1\cdot4-2\cdot(-1)}{1-2}=-6$에서 $P(-6)$이다.
(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는 $\dfrac{2\cdot4-1\cdot(-1)}{2-1}=9$에서 $Q(9)$이다.

보기 10.4 수직선 위의 두 점 $A(-2)$, $B(2)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 P와 선분 AB를 $1:3$으로 외분하는 점 Q의 좌표를 각각 구하시오.

보기 정답

10.4 $P(4)$, $Q(-4)$

좌표평면 위의 선분의 내분과 외분

좌표평면 위의 선분을 내분하는 점

수직선 위의 선분을 내분하는 점의 좌표를 구하는 것과 비슷한 방법으로 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 $(x,\ y)$를 구할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, P′이라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'P'}}:\overline{\mathrm{P'B'}}=m:n$$

이때 점 P′은 x축 위에서 선분 A′B′을 $m:n$으로 내분하는 점이므로 **수직선 위의 선분을 내분하는 점**(p.361)에서 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$이다. 또, y축 위에서도 마찬가지로 생각하면 $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$이다. 따라서 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

이다. 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1:1$로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

이다.

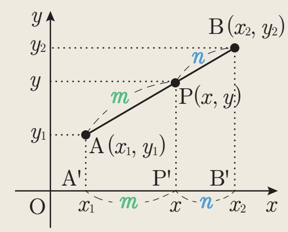


그림 10.10. 좌표평면 위의 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P

포인트 상 10.8 **좌표평면 위의 선분을 내분하는 점**

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여

- 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

- 선분 AB의 중점 M은

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

예 시 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$x=\frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2}=1,\ y=\frac{1\cdot4+2\cdot1}{1+2}=2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{P}(1,\ 2)$$

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$x=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2},\ y=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{M}\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

보기 10.5 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하시오.

보기 정답

10.5 $\mathrm{P}(2,\ 3)$

좌표평면 위의 선분을 외분하는 점

수직선 위의 선분을 외분하는 점의 좌표를 구하는 것과 비슷한 방법으로 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 (x, y)를 구할 수 있다.

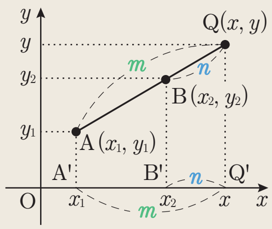


그림 10.11. 좌표평면 위의 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q

왼쪽 그림과 같이 세 점 A, B, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, Q′이라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\overline{AQ}:\overline{BQ}=\overline{A'Q'}:\overline{B'Q'}=m:n$$

이때 점 Q′은 x축 위에서 선분 A′B′을 $m:n$으로 외분하는 점이므로 수직선 위의 선분을 외분하는 점(p.362)에서 $x=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$이다. 또, y축 위에서도 마찬가지로 생각하면 $y=\dfrac{my_2-ny_1}{m-n}$이다. 따라서 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

이다.

포인트 상 10.9 **좌표평면 위의 선분을 외분하는 점**

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여

- 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

예 시

좌표평면 위의 두 점 $A(0, 1)$, $B(3, 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$x=\frac{2\cdot3-1\cdot0}{2-1}=6,\quad y=\frac{2\cdot4-1\cdot1}{2-1}=7$$

이므로 $Q(6, 7)$이다.

보기 10.6 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 1)$, $B(3, 4)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표를 구하시오.

보기 정답

10.6 $Q(-3, -2)$

삼각형의 무게중심

삼각형에서 세 중선의 교점을 삼각형의 무게중심이라 한다. 삼각형의 무게중심은 각 중선을 꼭짓점으로부터 $2:1$로 내분하는 성질이 있다.

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 선분을 내분하는 점의 좌표를 이용하여 구할 수 있다. 먼저 변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(x',\ y')$이라 하면 점 M의 x좌표와 y좌표는 각각

$$x' = \frac{x_2+x_3}{2}, \quad y' = \frac{y_2+y_3}{2}$$

이다. 무게중심 $\mathrm{G}(x,\ y)$는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{2x'+x_1}{2+1} = \frac{2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{2y'+y_1}{2+1} = \frac{2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

이다. 따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

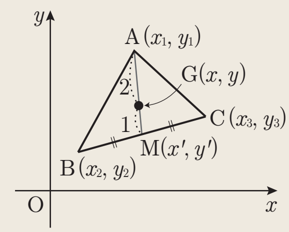


그림 10.12. 삼각형의 무게중심

포인트 상 10.10 **삼각형의 무게중심**

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심 G는

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

예 시

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 3)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 $\mathrm{G}(x,\ y)$라 하면

$$x = \frac{1+(-1)+3}{3} = 1, \quad y = \frac{2+3+1}{3} = 2$$

이므로 $\mathrm{G}(1,\ 2)$이다.

보기 10.7 다음 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하시오.

(1) 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$, $\mathrm{C}(3,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형

(2) 세 점 $\mathrm{A}(3,\ -1)$, $\mathrm{B}(2,\ 2)$, $\mathrm{C}(1,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형

보기 정답

10.7 (1) $(1,\ 2)$ (2) $(2,\ -1)$

예제 04

다음 물음에 답하시오.

(1) 두 점 $A(-2, 3)$, $B(5, a)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(b, 4)$일 때, a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 두 점 $A(2, 15)$, $B(11, c)$에 대하여 선분 AB를 $5:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(d, -5)$일 때, c, d의 값을 각각 구하시오.

길잡이 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P와 $m:n\,(m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right), \quad Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

이다. 이때, 중점 M은 $m:n=1:1$로 내분하는 점이므로 $M\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$이다.

풀이

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot5+2\cdot(-2)}{1+2}, \frac{1\cdot a+2\cdot3}{1+2}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{a+6}{3}\right)$$

이다. 이 좌표가 $(b, 4)$와 서로 같으므로

$$\frac{1}{3}=b, \quad \frac{a+6}{3}=4$$

를 만족해야 한다. 따라서 $a=6$, $b=\frac{1}{3}$이다.

(2) 선분 AB를 $5:2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5\times11-2\times2}{5-2}, \frac{5\times c-2\times15}{5-2}\right) \Rightarrow \left(17, \frac{5c-30}{3}\right)$$

이다. 이 좌표가 $(d, -5)$와 서로 같으므로

$$17=d, \quad \frac{5c-30}{3}=-5$$

를 만족해야 한다. 따라서 $c=3$, $d=17$이다.

정답 (1) $a=6$, $b=\frac{1}{3}$ (2) $c=3$, $d=17$

- 좌표평면 위의 선분을 외분하는 점(p.364)
- 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

돌다리 두드리기

두 점 $A(1, 1)$, $B(2, 3)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 (2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점

돌다리 두드리기

답 (1) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ (2) $(3, 5)$

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot1}{2+1}, \frac{2\cdot3+1\cdot1}{2+1}\right) \Rightarrow \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2-1\cdot1}{2-1}, \frac{2\cdot3-1\cdot1}{2-1}\right) \Rightarrow (3, 5)$$

정답 및 풀이 p.557

개념 그대로

유제 04-1

두 점 A$(a, 4)$, B$(-6, 0)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이 직선 $y=x$ 위에 있을 때, a의 값을 구하시오.

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot(-6)+2\cdot a}{3+2}, \frac{3\cdot 0+2\cdot 4}{3+2}\right) \Rightarrow \left(\frac{2a-18}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

이다. 이 점이 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{2a-18}{5}=\frac{8}{5} \Rightarrow 2a-18=8$$

를 만족해야 한다. 따라서 $a=13$이다.

답 13

개념 더하기

유제 04-2

+ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

두 점 A$(0, -4)$, B$(4, 8)$에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 P, 선분 AB의 중점을 각각 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{3\cdot 4-1\cdot 0}{3-1}, \frac{3\cdot 8-1\cdot(-4)}{3-1}\right) \Rightarrow \mathrm{P}(6, 14)$$

이고, 선분 AB의 중점 Q는

$$\mathrm{Q}\left(\frac{4+0}{1+1}, \frac{8+(-4)}{1+1}\right) \Rightarrow \mathrm{Q}(2, 2)$$

이다. 따라서 선분 PQ의 길이는

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(2-6)^2+(2-14)^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$$

답 $4\sqrt{10}$

개념 그대로

유제 04-3

두 점 A$(1, 3)$, B$(2, 1)$을 이은 선분 AB의 연장선 위의 점 C에 대하여 $2\overline{\mathrm{AC}}=3\overline{\mathrm{BC}}$이다. 이때 선분 BC의 중점의 좌표를 구하시오.

$2\overline{\mathrm{AC}}=3\overline{\mathrm{BC}}$에서

$$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:2$$

이므로 점 C는 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이다. 즉,

$$\mathrm{C}\left(\frac{3\times 2-2\times 1}{3-2}, \frac{3\times 1-2\times 3}{3-2}\right) \Rightarrow \mathrm{C}(4, -3)$$

이다. 따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) \Rightarrow (3, -1)$$

답 $(3, -1)$

삼각형의 무게중심

예제 05 세 점 A$(-4,\ -1)$, B$(6,\ 1)$, C$(4,\ 3)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표

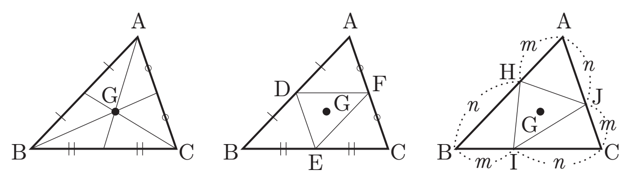
(2) 삼각형 ABC의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표

길잡이 좌표평면 위의 세 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심 G의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

또한 삼각형 ABC에서 다음과 같이 구한 점의 좌표는 모두 일치한다.

- **삼각형 ABC의 무게중심**
- **삼각형 ABC의 세 변의 중점을 연결하여 만든 삼각형 DEF의 무게중심**
- **삼각형 ABC의 세 변을 각각 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점들을 연결하여 만든 삼각형 HIJ의 무게중심**



풀 이

• 삼각형의 무게중심(p.365)

(1) 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4+6+4}{3},\ \frac{-1+1+3}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad (2,\ 1)$$

(2) 세 변 AB, BC, CA의 중점의 좌표를 각각 D, E, F라 하면

$$\mathrm{D}\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{-1+1}{2}\right),\quad \mathrm{E}\left(\frac{6+4}{2},\ \frac{1+3}{2}\right),\quad \mathrm{F}\left(\frac{4-4}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)$$

에서 D$(1,\ 0)$, E$(5,\ 2)$, F$(0,\ 1)$이다. 이 세 점 D, E, F를 꼭짓점으로 하는 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+5+0}{3},\ \frac{0+2+1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad (2,\ 1)$$

정답 (1) $(2,\ 1)$ (2) $(2,\ 1)$

돌다리 두드리기

세 점 A$(1,\ 3)$, B$(2,\ 2)$, C$(3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| G$(2,\ 2)$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{1+2+3}{3},\ \frac{3+2+1}{3}\right) \Rightarrow \mathrm{G}(2,\ 2)$$

정답 및 풀이 p.557

개념 그대로

유제 05-1

세 점 A(4, -5), B(-5, 2), C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (-3, 0)일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

점 C의 좌표를 (a, b)라 놓으면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+(-5)+a}{3}, \frac{(-5)+2+b}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a-1}{3}, \frac{b-3}{3}\right)$$

이다. 이 좌표가 $(-3, 0)$과 서로 같으므로

$$\frac{a-1}{3}=-3, \frac{b-3}{3}=0 \Rightarrow a=-8, b=3$$

이다. 따라서 점 C의 좌표는 C$(-8, 3)$이다.

답 C$(-8, 3)$

개념 그대로

유제 05-2

세 점 A(-3, -1), B(3, -4), C(6, 0)에 대하여 세 변 AB, BC, CA를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표를 구하시오.

점 D, E, F의 좌표를 구하면

$$\text{D}\left(\frac{2\cdot3+3\cdot(-3)}{2+3}, \frac{2\cdot(-4)+3\cdot(-1)}{2+3}\right) \Rightarrow \text{D}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}\right)$$

$$\text{E}\left(\frac{2\cdot6+3\cdot3}{2+3}, \frac{2\cdot0+3\cdot(-4)}{2+3}\right) \Rightarrow \text{E}\left(\frac{21}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

$$\text{F}\left(\frac{2\cdot(-3)+3\cdot6}{2+3}, \frac{2\cdot(-1)+3\cdot0}{2+3}\right) \Rightarrow \text{F}\left(\frac{12}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

이다. 따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-\frac{3}{5}+\frac{21}{5}+\frac{12}{5}}{3}, \frac{-\frac{11}{5}-\frac{12}{5}-\frac{2}{5}}{3}\right) \Rightarrow \left(2, -\frac{5}{3}\right)$$

[다른 풀이]
삼각형 ABC의 각 변을 각각 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점들을 연결하여 만든 삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 서로 일치한다. 따라서 삼각형 ABC의 무게중심을 구하면

$$\left(\frac{-3+3+6}{3}, \frac{-1-4+0}{3}\right) \Rightarrow \left(2, -\frac{5}{3}\right)$$

답 $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$

개념 더하기

유제 05-3

+ 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

세 점 O(0, 0), A(3, 1), B(1, 3)에 대하여 세 선분 OA, AB, BO를 각각 $1:2$, $2:1$, $3:1$로 내분하는 점을 순서대로 P, Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표를 구하시오.

선분 OA를 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\text{P}\left(\frac{1\cdot3+2\cdot0}{1+2}, \frac{1\cdot1+2\cdot0}{1+2}\right) \Rightarrow \text{P}\left(1, \frac{1}{3}\right)$$

이다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\text{Q}\left(\frac{2\cdot1+1\cdot3}{2+1}, \frac{2\cdot3+1\cdot1}{2+1}\right) \Rightarrow \text{Q}\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

이다. 선분 BO를 $3:1$로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\text{R}\left(\frac{3\cdot0+1\cdot1}{3+1}, \frac{3\cdot0+1\cdot3}{3+1}\right) \Rightarrow \text{R}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

이다. 따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+\frac{5}{3}+\frac{1}{4}}{3}, \frac{\frac{1}{3}+\frac{7}{3}+\frac{3}{4}}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{35}{36}, \frac{41}{36}\right)$$

답 $\left(\frac{35}{36}, \frac{41}{36}\right)$

선분의 내분과 외분의 응용

예제 06 다음 물음에 답하시오.

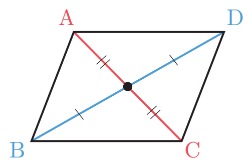
(1) 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3,\ b)$, $\mathrm{B}(a,\ 1)$, $\mathrm{C}(a-b,\ 2a)$가 이루는 사각형 OABC가 평행사변형일 때, a, b의 값을 각각 구하시오.

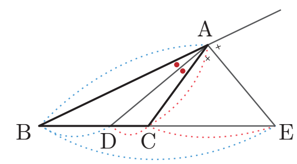
(2) 삼각형 ABC의 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$, $\mathrm{C}(4,\ 4)$에 대하여 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 D의 좌표를 구하시오.

| 길잡이 | 선분의 내분과 외분은 도형에서 다음과 같이 활용할 수 있다.

- 평행사변형 ABCD의 두 대각선은 서로 다른 대각선을 이등분한다. 즉, **두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치한다.**
- 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D, 각 A의 외각의 이등분선이 선분 BC의 연장선과 만나는 점을 E라 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}},\qquad \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}$$





| 풀 이 |

• 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

(1) 대각선 AC, BO의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{3+a-b}{2},\ \frac{b+2a}{2}\right),\quad \mathrm{N}\left(\frac{a}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

이다. 사각형 OABC가 평행사변형이므로 두 대각선 AC, BO의 중점이 일치한다. 즉

$$\frac{3+a-b}{2}=\frac{a}{2},\ \frac{b+2a}{2}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad 3-b=0,\ b+2a=1$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$이다.

(2) 선분 AD가 각 A를 이등분하므로 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$$

가 성립한다. 이때,

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-2)^2+(5-4)^2}=1,\quad \overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(4-2)^2+(4-4)^2}=2$$

에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:2$이다. 즉, 점 D는 변 BC를 $1:2$으로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{D}\left(\frac{1\cdot4+2\cdot2}{1+2},\ \frac{1\cdot4+2\cdot5}{1+2}\right)\quad\Rightarrow\quad \mathrm{D}\left(\frac{8}{3},\ \frac{14}{3}\right)$$

| 정답 | (1) $a=-1$, $b=3$ (2) $\mathrm{D}\left(\frac{8}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

돌다리 두드리기

세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$, $\mathrm{C}(3,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 다른 한 꼭짓점 D의 좌표를 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $\mathrm{D}(2,\ 0)$

평행사변형이므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치해야 한다. 점 D의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓으면 $\frac{1+3}{2}=\frac{2+a}{2}$, $\frac{1+2}{2}=\frac{3+b}{2}$

에서 $a=2$, $b=0$이다. 따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(2,\ 0)$이다.

개념 더하기

유제 06-1

+ 삼각형의 무게중심(p.365)

좌표평면 위에 평행사변형 ABCD가 있다. 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(5,\ 2)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3,\ 4)$일 때, 점 D의 좌표를 구하시오.

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4+5+a}{3},\ \frac{0+2+b}{3}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+1}{3},\ \frac{b+2}{3}\right)$$

이다. 이 좌표가 $(3,\ 4)$와 서로 같으므로

$$\frac{a+1}{3}=3,\quad \frac{b+2}{3}=4$$

에서 $a=8$, $b=10$이다. 즉, C$(8,\ 10)$이다. 점 D의 좌표를 $(c,\ d)$라 하자. 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점은

$$\text{선분 AC의 중점: }\left(\frac{-4+8}{2},\ \frac{0+10}{2}\right) \Rightarrow (2,\ 5)$$

$$\text{선분 BD의 중점: }\left(\frac{c+5}{2},\ \frac{d+2}{2}\right)$$

이고, 두 점은 일치한다. 즉,

$$\frac{c+5}{2}=2,\quad \frac{d+2}{2}=5$$

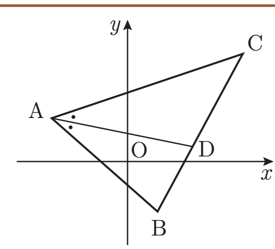
에서 $c=-1$, $d=8$이다. 따라서 점 D의 좌표는 D$(-1,\ 8)$이다.

답 D$(-1,\ 8)$

개념 그대로

유제 06-2

그림과 같이 세 점 A$(-2,\ 1)$, B$(1,\ -3)$, C$(10,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점 D의 좌표를 구하시오.



선분 AD는 각 CAB의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$$

이다. 이때 선분 AB, AC의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(-3-1)^2}=5$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(10+2)^2+(6-1)^2}=13$$

이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}=5:13$$

이다. 따라서 점 D는 선분 BC를 $5:13$으로 내분하는 점이다.

$$\frac{5\cdot10+13\cdot1}{5+13}=\frac{7}{2},\quad \frac{5\cdot6+13\cdot(-3)}{5+13}=-\frac{1}{2}$$

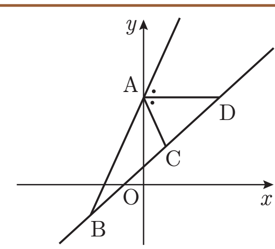
이므로 점 D의 좌표는 D$\left(\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이다.

답 D$\left(\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

개념 그대로

유제 06-3

그림과 같이 세 점 A$(0,\ 3)$, B$(-2,\ -1)$, C$(1,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 각 A의 외각의 이등분선이 직선 BC와 만나는 점 D의 좌표를 구하시오.



삼각형 ABC에서 각 A의 외각의 이등분선이 직선 BC와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

가 성립한다. 이때 선분 AB, AC의 길이를 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(1-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}=2:1$$

이므로 점 D는 선분 BC를 $2:1$로 외분하는 점이다. 따라서

$$\text{D}\left(\frac{2\cdot1-1\cdot(-2)}{2-1},\ \frac{2\cdot1-1\cdot(-1)}{2-1}\right) \Rightarrow \text{D}(4,\ 3)$$

답 D$(4,\ 3)$

연습은 실전처럼

10-1 두 점 사이의 거리 [1-5]

세 점 A(2, 0), B(a, 7), C(5, 1)에 대하여 $2\overline{AC}=\overline{BC}$를 만족시키는 모든 a의 값을 구하시오.

두 점 사이의 거리 공식(p.353)을 이용하여 각 선분의 길이를 제곱하면

$$\overline{AC}^2=(5-2)^2+(1-0)^2=10$$

$$\overline{BC}^2=(5-a)^2+(1-7)^2=a^2-10a+61$$

이다. $2\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $4\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$4\cdot10=a^2-10a+61 \quad\Rightarrow\quad a^2-10a+21=0$$

이다. a에 대한 **이차방정식(p.156)**을 풀면

$$(a-3)(a-7)=0$$

에서 $a=3$ 또는 $a=7$이다.

답 $a=3$ 또는 $a=7$

10-2

점 A(4, 2)와 직선 $y=-x$ 위에 있는 한 점 B에 대하여 선분 AB의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, 점 B의 좌표를 구하시오.

선분 AB의 **길이(p.353)**가 $3\sqrt{2}$이므로 점 B(a, $-a$)로 놓으면

$$3\sqrt{2}=\sqrt{(4-a)^2+(2+a)^2}$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$18=(4-a)^2+(2+a)^2 \quad\Rightarrow\quad (a-1)^2=0$$

이므로 $a=1$이다. 따라서 점 B의 좌표는 (1, -1)이다.

답 B(1, -1)

10-3

직선 $y=2x$ 위의 한 점 P와 세 점 O(0, 0), A(5, 3), B(0, 2)에 대하여 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 구하시오.

점 P(a, $2a$)로 놓으면

$$\begin{aligned}&\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2\\&=\{a^2+(2a)^2\}+\{(a-5)^2+(2a-3)^2\}+\{a^2+(2a-2)^2\}\\&=15a^2-30a+38=15(a-1)^2+23\end{aligned}$$

에서 $a=1$일 때, 주어진 식의 **최솟값(p.203)**은 23이다.

답 23

10-4

두 점 A(3, 0), B(5, -2)에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하시오.

점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면 **두 점 사이의 거리 공식(p.353)**에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=\{(a-3)^2+b^2\}+\{(a-5)^2+(b+2)^2\}\\&=2(a-4)^2+2(b+1)^2+4\end{aligned}$$

에서 a, b가 실수이므로 $a=4$, $b=-1$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 **최소(p.203)**가 된다. 따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(4, -1)이다.

답 P(4, -1)

10-5

실수 x, y에 대하여

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}$$

의 최솟값을 구하시오.

세 점 A(2, -3), B(x, y), C(-4, 3)이라 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}$$

이므로 주어진 식은 $\overline{AB}+\overline{BC}$이다. $\overline{AB}+\overline{BC}$의 값이 최소인 경우는 점 B가 선분 AC 위에 있을 때이므로 **두 점 사이의 거리 공식(p.353)**을 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{BC}&\geq\overline{AC}\\&=\sqrt{(-4-2)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

에서 구하는 식의 **최솟값(p.203)**은 $6\sqrt{2}$이다.

답 $6\sqrt{2}$

10-6 선분의 내분과 외분 [6-12]

수직선 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

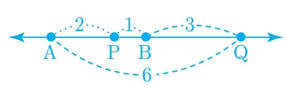
[보기]

ㄱ. 점 P는 선분 AQ를 1:2로 내분하는 점이다.

ㄴ. 점 B는 선분 AQ의 중점이다.

ㄷ. 점 A는 선분 PB를 3:2로 외분하는 점이다.

점 A가 점 B보다 수직선의 왼쪽에 위치한다고 할 때, 두 점 P, Q의 위치는 다음 그림과 같다.



ㄱ. (참) $\overline{AP}:\overline{PQ}=1:2$이므로 점 P는 선분 AQ를 1:2로 **내분하는 점(p.361)**이다.
ㄴ. (참) $\overline{AB}=\overline{BQ}$이므로 점 B는 선분 AQ의 **중점(p.361)**이다.
ㄷ. (거짓) $\overline{AP}:\overline{AB}=2:3$이므로 점 A는 선분 PB를 2:3으로 **외분하는 점(p.362)**이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

10-7

두 점 A$(-5,\ -1)$, B$(2,\ 8)$을 이은 선분 AB가 y축에 의하여 $m:n$으로 내분될 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 **내분하는 점(p.363)**의 좌표는

$$\left(\frac{2m-5n}{m+n},\ \frac{8m-n}{m+n}\right)$$

이다. 만약 이 점이 y축 위에 있다면 $\frac{2m-5n}{m+n}=0$에서 $2m=5n$이 성립한다. 이때 m과 n이 서로소인 자연수이므로 $m=5,\ n=2$이고 $m+n=7$이다.

답 7

10-8

세 점 A$(-1,\ a)$, B$(b,\ 2)$, C$(a,\ b+1)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$로 내분하는 점의 좌표가 $(2,\ 8)$이고 선분 BC를 $4:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(x,\ y)$이다. $x+y$의 값을 구하시오.

선분 AB를 $1:3$으로 **내분하는 점(p.363)**의 좌표가 $(2,\ 8)$이므로

$$\frac{1\cdot b+3\cdot(-1)}{1+3}=2,\quad \frac{1\cdot 2+3\cdot a}{1+3}=8$$

에서 $a=10,\ b=11$임을 얻는다. 따라서 점 B와 C의 좌표는 각각

$$\mathrm{B}(11,\ 2),\quad \mathrm{C}(10,\ 12)$$

이다. 한편, 선분 BC를 $4:1$로 **외분하는 점(p.364)**의 좌표가 (x,y)이므로

$$x=\frac{4\cdot 10-1\cdot 11}{4-1},\quad y=\frac{4\cdot 12-1\cdot 2}{4-1}$$

에서 $x=\frac{29}{3},\ y=\frac{46}{3}$이다. 따라서 구하는 값은 $x+y=\frac{75}{3}=25$이다.

답 25

10-9

세 점 A$(-1,\ 4)$, B$(5,\ 0)$, C$(8,\ 4)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 하는 꼭짓점 D의 좌표를 구하시오.

점 D의 좌표를 D$(a,\ b)$라 하면 평행사변형의 성질에 의하여 두 대각선 AC, BD의 **중점(p.363)**이 일치하므로 각각의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+8}{2},\ \frac{4+4}{2}\right),\quad \left(\frac{5+a}{2},\ \frac{0+b}{2}\right)$$

에서

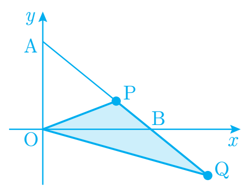
$$\frac{-1+8}{2}=\frac{5+a}{2},\quad \frac{4+4}{2}=\frac{0+b}{2}$$

을 만족한다. 즉, $a=2,\ b=8$이다. 따라서 꼭짓점 D의 좌표는 D$(2,\ 8)$이다.

답 D$(2,\ 8)$

10-10

두 점 A$(0,\ 3)$, B$(6,\ 0)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하고, 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



점 P의 좌표는 선분 AB를 $2:1$로 **내분하는 점(p.363)**이므로

$$\left(\frac{2\times6+1\times0}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right)\Rightarrow(4,\ 1)$$

이고, 점 Q의 좌표는 선분 AB를 $3:1$로 **외분하는 점(p.364)**이므로

$$\left(\frac{3\times6-1\times0}{3-1},\ \frac{3\times0-1\times3}{3-1}\right)\Rightarrow\left(9,\ -\frac{3}{2}\right)$$

이다. 따라서 삼각형 OPQ는 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OBP}+\triangle\mathrm{OBQ}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times6\times1\right)+\left(\frac{1}{2}\times6\times\frac{3}{2}\right)=\frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

10-11

삼각형 ABC의 두 꼭짓점이 A$(0,\ 4)$, B$(1,\ 1)$이고, 무게중심의 좌표가 $(2,\ 2)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하시오.

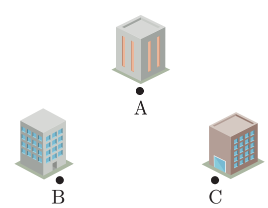
점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 삼각형 ABC의 **무게중심(p.365)**에 대하여

$$\frac{0+1+x}{3}=2,\quad \frac{4+1+y}{3}=2$$

이므로 $x=5,\ y=1$이다. 따라서 꼭짓점 C의 좌표는 C$(5,\ 1)$이다.

답 C$(5,\ 1)$

10-12



그림과 같이 세 지점 A, B, C에 위치한 백화점에 물품을 공급하는 공장을 세우려고 한다. 물품의 운반 비용은 공장에서 각 백화점에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 물품의 운반 비용이 최소가 되게하는 공장의 위치를 구하시오.

세 지점 A, B, C의 위치를 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$라 하고 공장의 위치를 P$(x,\ y)$라 하면 물품의 운반 비용은 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$에 비례한다. 이때

$$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\}+\{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\}$$
$$+\{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$
$$=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+\cdots$$

의 값은 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때, 즉 점 P$(x,\ y)$가 삼각형 ABC의 **무게중심(p.365)**일 때 물품의 운반 비용이 최소이다.

답 삼각형 ABC의 무게중심

10-1

좌표평면 위의 네 점 A, B, C, D가 다음 세 조건을 만족할 때, 점 D의 좌표를 구하시오.

(가) 두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(-5,\ 7)$, B$(3,\ -1)$이다.
(나) 점 C는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이다.
(다) 점 D는 선분 AC의 중점이다.

점 C의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$으로 놓으면 (가)에서 A$(-5,\ 7)$, B$(3,\ -1)$이고 (나)에 의하여 점 C$(x_1,\ y_1)$은 선분 AB를 $1:3$으로 **내분하는 점(p.363)**이므로

$$x_1=\frac{1\times3+3\times(-5)}{1+3}=-3,\quad y_1=\frac{1\times(-1)+3\times7}{1+3}=5$$

이다. 즉, 점 C의 좌표는 $(-3,\ 5)$이다. 한편, 점 D의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$로 놓으면 (가), (나)에서 A$(-5,\ 7)$, C$(-3,\ 5)$이고 (다)에 의하여 점 D$(x_2,\ y_2)$는 선분 AC의 **중점(p.363)**이므로

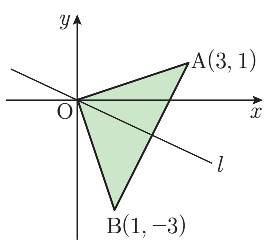
$$x_2=\frac{-5+(-3)}{2}=-4,\quad y_2=\frac{7+5}{2}=6$$

이다. 따라서 점 D의 좌표는 D$(-4,\ 6)$이다.

답 D$(-4,\ 6)$

10-2

그림과 같이 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(3,\ 1)$, B$(1,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 원점을 지나며 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하는 직선 l과 선분 AB의 교점의 좌표를 구하시오.



직선 l이 선분 AB의 **중점(p.363)**을 지날 때, 삼각형 OAB의 넓이는 이등분된다. 구하는 교점의 좌표를 M$(a,\ b)$이라 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$$a=\frac{3+1}{2}=2,\quad b=\frac{1-3}{2}=-1$$

에서 점 M의 좌표는 $(2,\ -1)$이다.

답 $(2,\ -1)$

10-3

두 점 A$(-3,\ 7)$, B$(5,\ -8)$을 이은 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제1사분면 위에 있기 위한 실수 t의 범위를 구하시오. (단, $0<t<1$이다.)

선분 AB를 $t:(1-t)$로 **내분하는 점(p.363)**의 좌표는

$$\left(\frac{t\times5+(1-t)\times(-3)}{t+1-t},\ \frac{t\times(-8)+(1-t)\times7}{t+1-t}\right)$$
$$\Rightarrow\quad(8t-3,\ -15t+7)$$

이다. 이 점이 제1사분면 위의 점일 때,

$$8t-3>0,\quad -15t+7>0 \qquad\cdots㉠$$

을 만족해야 한다. 한편, $0<t<1$이므로 ㉠과 연립하면 t의 범위는 다음과 같다.

$$\frac{3}{8}<t<\frac{7}{15}$$

답 $\frac{3}{8}<t<\frac{7}{15}$

10-4

세 점 A$(a,\ a)$, B$(3,\ a)$, C$(2,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 이 정삼각형의 둘레의 길이를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 각 변의 **길이(p.353)**를 제곱하면

$$\overline{AB}^2=(3-a)^2$$
$$\overline{BC}^2=(2-3)^2+(b-a)^2=1+(b-a)^2$$
$$\overline{AC}^2=(2-a)^2+(b-a)^2=a^2-4a+4+(b-a)^2$$

이다. 이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

을 만족해야 한다. 우선, $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$을 풀면

$$a^2-4a+3=(a-1)(a-3)=0$$

에서 a의 값은 1 또는 3이다. 한편, 선분 AB의 길이에서 $a=1$이면 $\overline{AB}^2=4$이고, $a=3$이면 $\overline{AB}^2=0$이다. 변의 길이가 0이 될 수는 없으므로 삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2$이다. 따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $3\times2=6$이다.

답 6

10-5

네 점 $A(a, 0)$, $B(4, 2)$, $C(b, c)$, $D(0, 6)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 마름모일 때, a, b, c에 대하여 $-a+b+c$의 값을 구하시오.

마름모는 네 변의 길이가 모두 같고 두 대각선이 서로를 이등분한다. 우선, 네 변의 **길이(p.353)**가 같으므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$에서

$$\sqrt{(4-a)^2+(2-0)^2}=\sqrt{(0-a)^2+(6-0)^2}$$

이므로 양변을 제곱하면

$$a^2-8a+20=a^2+36 \quad \Rightarrow \quad 8a=-16$$

에서 $a=-2$이다. 또한, 선분 AC의 **중점(p.363)** $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$와 선분 BD의 중점 $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$이 일치하므로

$$\frac{a+b}{2}=\frac{4+0}{2}, \quad \frac{0+c}{2}=\frac{2+6}{2} \quad \Rightarrow \quad a+b=4,\ c=8$$

이다. 식을 연립하여 풀면 $b=6$이므로 구하는 값은 $-a+b+c=2+6+8=16$이다.

답 16

10-6 교육청 기출

삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $2:3$으로 외분하는 점을 E, 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점을 F라 하자. 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 k배이다. 이때, 상수 k의 값을 구하시오.

삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 $1:3$으로 **내분하는 점(p.363)**이므로

$$\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$$

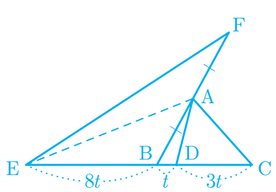
이고, 점 E는 선분 BC를 $2:3$으로 **외분하는 점(p.364)**이므로

$$\overline{EB}=2\overline{BC}$$

이고, 점 F는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점이므로

$$\overline{BF}=2\overline{AB}$$

이다. 따라서 $\overline{BD}=t$라 하면, 여섯개의 점 A, B, C, D, E, F는 그림과 같이 나타낼 수 있다.



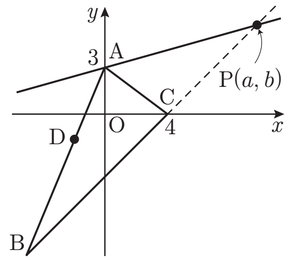
(단, t는 실수)

따라서 그림과 같이 $\overline{EB}=8\overline{BD}$이므로 삼각형 AEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 8배이다. 또한 $\overline{BF}=2\overline{AB}$이므로 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 AEB의 넓이의 2배이고 삼각형 ABD의 넓이의 16배이다. 따라서 $k=16$이다.

답 16

10-7

세 꼭짓점의 좌표가 $A(0, 3)$, $B(-5, -9)$, $C(4, 0)$인 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{AD}$가 되도록 점 D를 선분 AB 위에 잡는다. 점 A를 지나면서 선분 DC와 평행인 직선이 직선 BC와 만나는 점을 $P(a, b)$라 하자. $a-b$의 값을 구하시오.



선분 AB와 선분 AC의 **길이(p.353)**를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{25+144}=13,\ \overline{AC}=\sqrt{16+9}=5$$

이다. 선분 AP와 선분 DC가 평행하므로

$$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$$

이다. 이때 $\overline{AC}=\overline{AD}$이므로 $\overline{AD}=5$이고, $\overline{AB}:\overline{AD}=13:5$이다. 따라서,

$$\overline{PB}:\overline{PC}=13:5$$

이다. 즉, 점 P는 선분 BC를 $13:5$로 **외분하는 점(p.364)**이므로

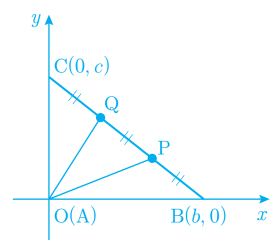
$$a=\frac{13\cdot4-5\cdot(-5)}{13-5}=\frac{77}{8},\ b=\frac{13\cdot0-5\cdot(-9)}{13-5}=\frac{45}{8}$$

이 성립한다. 따라서 $a-b=\frac{77}{8}-\frac{45}{8}=4$이다.

답 4

10-8

$\angle A=90°$이고 $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 BC의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P, 점 C에 가까운 점을 Q라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2$의 값을 구하시오.



선분 AP는 삼각형 ABQ의 중선이므로 중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2+\overline{AQ}^2=2(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)$$

이고 선분 AQ는 삼각형 APC의 중선이므로 중선정리에 의하여

$$\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AQ}^2+\overline{QC}^2)$$

이다. 이때 $\overline{BC}=2\sqrt{3}$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=12$이다. 또한,

$$\overline{BP}=\overline{QC}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \overline{BP}^2+\overline{QC}^2=\frac{8}{3}$$

이다. 따라서,

$$\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{QC}^2)$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+2(\overline{BP}^2+\overline{QC}^2)$$

$$12=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\frac{16}{3}$$

에서 $\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=\frac{20}{3}$이다. 따라서 구하는 값은

$$\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{QC}^2)$$

$$=2\left(\frac{20}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{56}{3}$$

답 $\frac{56}{3}$

11 직선의 방정식

정의 & 포인트 확인

- 축에 평행한 직선의 방정식
- 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식
- 두 점을 지나는 직선의 방정식
- x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식
- 직선의 방정식의 일반형

- m의 값에 관계없이 지나는 점

- 표준형으로 주어진 두 직선의 위치 관계
- 두 직선이 서로 수직일 조건
- 일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계
- 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

- 점과 직선 사이의 거리
- 점과 직선 사이의 거리 공식

11-1 직선의 방정식

축에 평행한 직선의 방정식

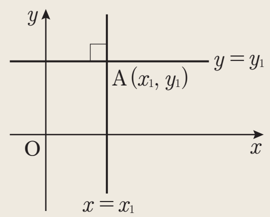


그림 11.1. 축에 평행한 직선

좌표평면에서 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선 위에 있는 점들의 x좌표는 모두 x_1이므로 이 직선의 방정식은 $x=x_1$이다. 특히 y축의 방정식은 $x=0$이다.

좌표평면에서 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선 위에 있는 점들의 y좌표는 모두 y_1이므로 이 직선의 방정식은 $y=y_1$이다. 특히 x축의 방정식은 $y=0$이다.

포인트 상 11.1 **축에 평행한 직선의 방정식**

- 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선은 $x=x_1$이다.
- 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선은 $y=y_1$이다.

예 시 | 점 $A(1, 2)$를 지나고 x축에 평행한 직선은 $y=2$이고, y축에 평행한 직선은 $x=1$이다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

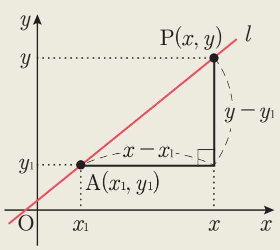


그림 11.2. 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 l

좌표평면에서 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선 l의 방정식을 구해보자. 직선 l 위의 한 점 $P(x, y)$에 대하여 $x \neq x_1$일 때, 기울기

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

은 점 P의 위치에 관계없이 항상 일정하다. 따라서 양변에 $x-x_1$을 곱하면

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots (11.1.1)$$

을 얻는다. 또한 $x=x_1$일 때 (11.1.1)의 식에 대입하면 $y-y_1=m\cdot 0$이므로 $y=y_1$임을 알 수 있다. 따라서 (11.1.1)은 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식이다.

반대로 방정식 (11.1.1)을 만족하는 점 $P(x, y)$는 직선 l 위의 점이다.

특히 방정식 (11.1.1)에 $m=0$을 대입하면 $y=y_1$이 된다. 즉, 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선은 기울기가 0이다.

포인트 상 11.2 **한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식**

한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

예 시 점 (1, 2)를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-2=3(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=3x-1$$

보기 11.1 점 $(-1, 4)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

두 점을 지나는 직선의 방정식

한 점을 지나는 직선은 무수히 많지만, 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 뿐이다. 이제 좌표평면에서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 구해보자.

- $x_1 \neq x_2$인 경우, 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기 m은
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
이고, 이 직선이 점 $A(x_1, y_1)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
- $x_1=x_2$인 경우, 직선 l은 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 y축에 평행하므로 직선 l 위의 모든 점의 x좌표는 x_1이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=x_1$이다.

포인트 상 11.3 **두 점을 지나는 직선의 방정식**

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

- $x_1 \neq x_2$일 때, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
- $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

예 시 (1) 두 점 (1, 1), (2, 3)을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

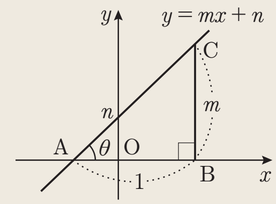
$$y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=2x-1$$

(2) 두 점 (1, 1), (1, 3)을 지나는 직선의 방정식은 두 점의 x좌표가 같으므로 $x=1$ 이다.

보기 11.2 두 점 (0, 0), (1, 2)를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

직선의 기울기 $m=\tan\theta$

직선 $y=mx+n$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자.



그림과 같이 $\overline{AB}=1$이 되도록 x축 위에 두 점 A, B를 잡고, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=mx+n$과 만나는 점을 C라 하면 $\overline{BC}=m$이다. 삼각형 ABC는 각 ABC가 직각인 직각삼각형이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{m}{1}=m$$

이다.

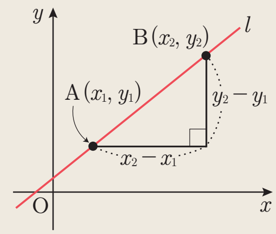


그림 11.3. $x_1 \neq x_2$인 경우, 두 점 A, B를 지나는 직선

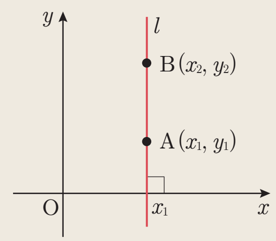


그림 11.4. $x_1=x_2$인 경우, 두 점 A, B를 지나는 직선

보기 정답

11.1 $y=4$

11.2 $y=2x$

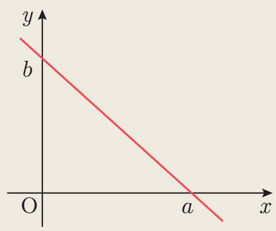


그림 11.5. x절편이 a, y절편이 b인 직선

x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식

$a\neq0$, $b\neq0$일 때 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식을 구해보자. 직선과 x축이 만나는 점의 x좌표가 x절편이고 직선과 y축이 만나는 점의 y좌표가 y절편이므로 구하는 직선은 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나는 직선이다. **두 점을 지나는 직선의 방정식(p.379)**으로부터 직선의 방정식은

$$y-b=\frac{0-b}{a-0}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x+b$$

이고 양변을 b로 나누면 $\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$에서 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이다.

포인트 상 11.4 **x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식**

$a\neq0$, $b\neq0$일 때 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

보기 11.3 x절편이 2이고 y절편이 1인 직선의 방정식을 구하시오.

직선의 방정식의 일반형

좌표평면에서 기울기가 -1이고 y절편이 2인 직선 $y=-x+2$는 $x+y-2=0$과 같이 나타낼 수 있다. 또한 두 점 $(1, 1)$, $(2, 4)$를 지나는 직선은 $y=3x-2$이고 $3x-y-2=0$과 같이 나타낼 수 있다. 즉, 좌표평면 위의 직선은 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0 \quad (a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

반대로 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ $(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$의 그래프는 a, b의 값에 따라 다음과 같이 나타난다.

- $a\neq0$, $b\neq0$인 경우 일차방정식 $ax+by+c=0$은

  $$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

  와 같이 표현된다. 이것은 기울기가 $-\frac{a}{b}$이고 y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선이다.
- $a=0$, $b\neq0$인 경우 일차방정식 $by+c=0$은

  $$y=-\frac{c}{b}$$

  와 같이 표현된다. 이것은 점 $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$를 지나고 **$x$축에 평행한 직선(p.378)**이다.

보기 정답

11.3 $\frac{x}{2}+y=1$

- $a\neq 0$, $b=0$인 경우 일차방정식 $ax+c=0$은

$$x=-\frac{c}{a}$$

와 같이 표현된다. 이것은 점 $\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$을 지나고 **$y$축에 평행한 직선**(p.378)이다.

따라서 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ ($a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$)의 그래프는 직선이다.

포인트 상 11.5 **직선의 방정식의 일반형**

직선의 방정식은 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0 \quad (a\neq 0\ 또는\ b\neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 반대로 이 일차방정식의 그래프는 직선이다.

보기 11.4 직선의 방정식 $3x-2y+5=0$을 표준형으로 나타내시오.

m의 값에 관계없이 지나는 점

직선 $(x-2)m+y-1=0$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 찾아보자. 이 직선의 방정식은 m에 대한 항등식이므로, **항등식의 성질 I**(p.49)에 의하여 $x=2$, $y=1$이다. 즉, 방정식 $(x-2)m+y-1=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 1)$을 지난다.

포인트 상 11.6 **m의 값에 관계없이 지나는 점**

직선 $(x-x_1)m+y-y_1=0$은 m의 값에 관계없이 점 $(x_1,\ y_1)$을 항상 지난다.

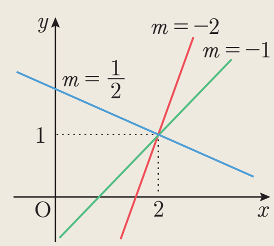
예 시 | 직선 $y=mx-4m-2$는 $m(x-4)-y-2=0$이고, $x=4$, $y=-2$일 때 m의 값에 관계없이 항상 성립한다. 따라서 이 직선은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ -2)$를 지난다.

보기 11.5 직선 $mx-2m+y-1=0$은 실수 m의 값에 관계없이 항상 일정한 점 P를 지난다. 이때, 점 P의 좌표를 구하시오.

직선의 방정식의 표준형

x, y에 대한 일차방정식 $y=mx+n$의 꼴을 직선의 방정식의 표준형이라 한다.

x, y에 대한 방정식 $(x-2)m+y-1=0$을 y에 대하여 정리하면 $y=-mx+2m+1$이다. 이 직선의 방정식은 상수 m의 값에 따라 기울기와 y절편이 다른 다양한 직선이 나타난다.



$m=-2$일 때, $\quad y=2x-3$

$m=-1$일 때, $\quad y=x-1$

$m=\frac{1}{2}$일 때, $\quad y=-\frac{1}{2}x+2$

$\vdots$

하지만 이 직선들은 모두 점 $(2,\ 1)$을 지난다.

보기 정답

11.4 $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

11.5 $\mathrm{P}(2,\ 1)$

예제 01 다음 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 $(3,\ -2)$, $(5,\ 8)$을 이은 선분의 중점을 지나고 기울기가 2인 직선

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 6)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점과 점 $(-1,\ 7)$을 지나는 직선

(3) y절편이 x절편의 3배이고 점 $(3,\ 12)$를 지나는 직선 (단, x절편은 0이 아니다.)

길잡이 주어진 조건에 따라 다양한 방법으로 직선의 방정식을 구한다.

- 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$
- 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
- $a\neq0$, $b\neq0$일 때, x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

풀 이

(1) 주어진 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{-2+8}{2}\right) \Rightarrow (4,\ 3)$$

이다. 따라서 점 $(4,\ 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-3=2(x-4) \Rightarrow y=2x-5$$

(2) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-4)}{2+1},\ \frac{2\cdot3+1\cdot6}{2+1}\right) \Rightarrow (0,\ 4)$$

이다. 따라서 두 점 $(0,\ 4)$, $(-1,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{7-4}{-1-0}(x-0) \Rightarrow y=-3x+4$$

(3) x절편을 $a\ (a\neq0)$라 하면 y절편이 x절편의 3배이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{3a}=1$$

이다. 이 직선이 점 $(3,\ 12)$를 지나므로

$$\frac{3}{a}+\frac{12}{3a}=1 \Rightarrow a=7$$

이다. 따라서 직선의 방정식 $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{21}=1$이고, 정리하면 $y=-3x+21$이다.

정답 (1) $y=2x-5$ (2) $y=-3x+4$ (3) $y=-3x+21$

- 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)
- 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

돌다리 두드리기

다음 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 $(2,\ 3)$, $(0,\ -1)$의 중점을 지나고 기울기가 -1인 직선

(2) x절편이 3이고 점 $(-1,\ -8)$을 지나는 직선

돌다리 두드리기

|답| (1) $y=-x+2$ (2) $y=2x-6$

(1) 두 점 $(2,\ 3)$, $(0,\ -1)$의 중점이 $(1,\ 1)$이다. 따라서 구하는 직선은 기울기가 -1이고 점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선이므로 $y=-(x-1)+1$ 즉, $y=-x+2$이다.

(2) 두 점 $(3,0)$, $(-1,\ -8)$을 지나는 직선이므로 $y=\dfrac{-8-0}{-1-3}(x-3)$ 즉, $y=2x-6$이다.

정답 및 풀이 p.561

개념 바꾸기

유제 01-1

- 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)
+ 좌표평면 위의 선분을 외분하는 점(p.364)

두 점 A(2, 1), B(−1, 3)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점을 지나고 기울기가 −2인 직선의 방정식을 구하시오.

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot(-1)-2\cdot 2}{1-2},\ \frac{1\cdot 3-2\cdot 1}{1-2}\right) \quad\Rightarrow\quad (5,\ -1)$$

이다. 따라서 점 (5, −1)을 지나고 기울기가 −2인 직선의 방정식은

$$y+1=-2(x-5) \quad\Rightarrow\quad y=-2x+9$$

답 $y=-2x+9$

개념 그대로

유제 01-2

두 점 (5, −8)과 (k, 6)을 지나는 직선의 x절편이 4일 때, k의 값을 구하시오.

직선의 x절편이 4이므로 두 점 (5, −8), (4, 0)을 지나는 직선이라고 할 수 있다. 따라서

$$y=\frac{-8-0}{5-4}(x-4)=-8x+32$$

이다. 이 직선이 점 (k, 6)을 지나므로 대입하면

$$6=-8\cdot k+32$$

에서 $k=\frac{13}{4}$이다.

답 $\frac{13}{4}$

개념 그대로

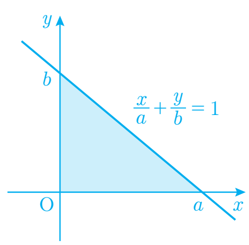
유제 01-3

좌표평면에서 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 12일 때, 두 양수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 x절편은 a, y절편은 b이다.
a, b가 양수이므로 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 그림과 같다.
직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 밑변이 a, 높이가 b인 삼각형이다. 삼각형의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2}\times a\times b=12$$

에서 $ab=24$이다.



답 24

계수의 부호와 직선의 개형

예제 02 세 수 a, b, c가 다음을 만족할 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.

(1) $a>0$, $b>0$, $c<0$ (2) $a=0$, $bc>0$ (3) $ac<0$, $bc>0$

| 길잡이 | 일반형 $ax+by+c=0$으로 주어진 직선의 방정식으로부터 기울기, x절편, y절편의 부호를 파악하면 직선의 개형을 파악할 수 있다.

| 풀 이 |

- 직선의 방정식의 일반형(p.381)
- x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식(p.380)
- 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)

(1) $b\neq0$이므로 주어진 직선의 방정식을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이다. 이때

$$\text{기울기}=-\frac{a}{b}<0,\quad x\text{절편}=-\frac{c}{a}>0,\quad y\text{절편}=-\frac{c}{b}>0$$

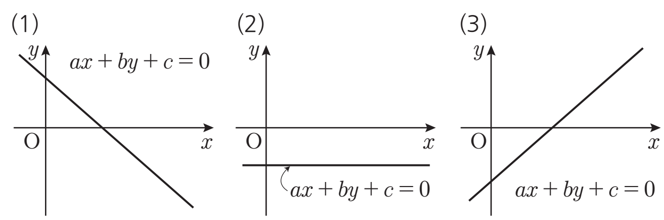
이므로 직선 $ax+by+c=0$은 제1, 2, 4사분면을 지난다.

(2) $a=0$이므로 주어진 직선은 $y=-\frac{c}{b}$이다. 이때 $-\frac{c}{b}<0$이므로 직선 $ax+by+c=0$은 제3, 4사분면을 지난다.

(3) $b\neq0$이므로 주어진 직선의 방정식을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이다. 이때 $ac<0$에서 a와 c는 부호가 다르고, $bc>0$에서 b와 c는 부호가 같다. 따라서 a와 b는 부호가 다르고 $ab<0$이다. 그러므로

$$\text{기울기}=-\frac{a}{b}>0,\quad x\text{절편}=-\frac{c}{a}>0,\quad y\text{절편}=-\frac{c}{b}<0$$

이다. 따라서 직선 $ax+by+c=0$은 제1, 3, 4사분면을 지난다.



| 정답 | (1) 제1, 2, 4사분면 (2) 제3, 4사분면 (3) 제1, 3, 4사분면

돌다리 두드리기

세 수 a, b, c가 다음을 만족할 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 구하시오.

(1) $a=0$, $b>0$, $c<0$ (2) $ac>0$, $bc>0$

돌다리 두드리기

| 답 | (1) 제1, 2사분면 (2) 제2, 3, 4사분면

(1) $a=0$이므로 $y=-\frac{c}{b}$이고 $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선은 제1, 2사분면을 지난다.

(2) $ac>0$, $bc>0$이므로 x절편은 $-\frac{a}{c}<0$, y절편은 $-\frac{c}{b}<0$이다. 따라서 직선은 제2, 3, 4사분면을 지난다.

정답 및 풀이 p.562

개념 그대로

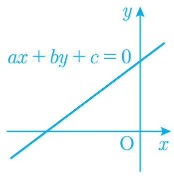
유제 02-1

세 실수 a, b, c에 대하여 $ab<0$, $\frac{b}{c}<0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 않는 사분면을 구하시오.

$ab<0$에서 a와 b는 부호가 다르고, $\frac{b}{c}<0$에서 b와 c도 부호가 다르다. 따라서 a와 c는 부호가 같고 $ac>0$이다. 그러므로

$$기울기=-\frac{a}{b}>0,\ x절편=-\frac{c}{a}<0,\ y절편=-\frac{c}{b}>0$$

이다. 따라서 직선 $ax+by+c=0$은 제1, 2, 3사분면을 지나고 제4사분면을 지나지 않는다.

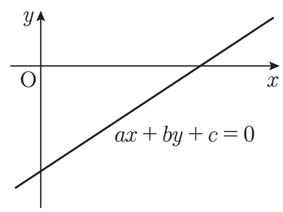


답 제4사분면

개념 그대로

유제 02-2

직선 $ax+by+c=0$이 오른쪽 그림과 같을 때,
직선 $cx-by+a=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.



직선 $ax+by+c=0$의 기울기, x절편, y절편의 부호는

$$기울기=-\frac{a}{b}>0,\ x절편=-\frac{c}{a}>0,\ y절편=-\frac{c}{b}<0$$

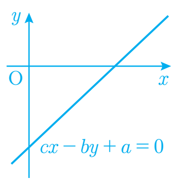
이다. 따라서

$$ab<0,\ ac<0,\ bc>0$$

이다. 이것으로부터 직선 $cx-by+a=0$의 기울기, x절편, y절편의 부호는

$$기울기=\frac{c}{b}>0,\ x절편=-\frac{a}{c}>0,\ y절편=\frac{a}{b}<0$$

이다. 따라서 직선 $cx-by+a=0$은 제1, 3, 4분면을 지난다.



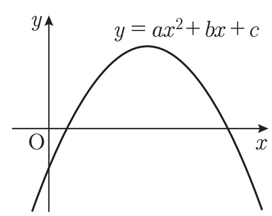
답 제1, 3, 4사분면

개념 더하기

유제 02-3

+ 이차함수의 일반형(p.191)

이차함수 $y=ax^2+bx+c=$의 그래프가 그림과 같을 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나는 사분면을 모두 구하시오.



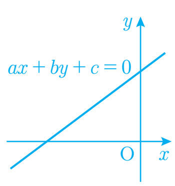
주어진 이차함수가 위로 볼록하고, 꼭짓점의 x좌표가 0보다 크고, y절편이 0보다 작으므로

$$a<0,\ -\frac{b}{2a}>0,\ c<0$$

이다. 즉, $a<0$, $b>0$, $c<0$이다. 따라서 직선 $ax+by+c=0$의 기울기, x절편, y절편의 부호는

$$기울기=-\frac{a}{b}>0,\ x절편=-\frac{c}{a}<0,\ y절편=-\frac{c}{b}>0$$

이다. 그러므로 직선 $ax+by+c=0$은 제1, 2, 3분면을 지난다.



답 제1, 2, 3사분면

도형을 이등분하는 직선의 방정식

예제 03 다음 물음에 답하시오.

(1) 세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 2)$, $B(-1, 6)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하시오.

(2) 네 점 $A(1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(7, 5)$, $D(7, 1)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형ABCD의 넓이를 직선 $y=mx-5$가 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하시오.

| 길잡이 | 다음과 같은 경우 직선이 도형의 넓이를 이등분한다.

(1) **점 A를 지나면서 선분 BC의 중점을 지나는 직선, 즉 중선**은 삼각형 ABC의 넓이를 이등분한다.

(2) **평행사변형의 중심, 즉 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선**은 평행사변형의 넓이를 이등분한다.

| 풀 이 |

• 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)

(1) 직선 $y=mx$가 삼각형 OAB의 한 꼭짓점 O를 지난다. 따라서 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 직선 $y=mx$가 선분 AB의 중점

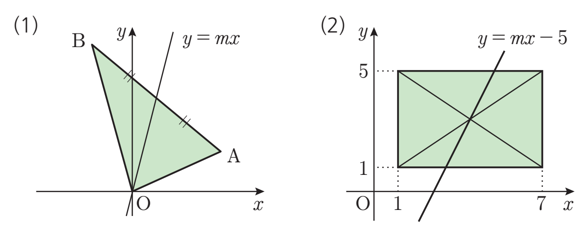
$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \Rightarrow (1, 4)$$

를 지나야 한다. 즉, $(1, 4)$를 $y=mx$에 대입하면 $m=4$이다.

(2) 직선 $y=mx-5$가 직사각형을 이등분하려면 직사각형의 중심, 즉 두 대각선의 교점

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \Rightarrow (4, 3)$$

을 지나야 한다. 즉, $(4, 3)$을 $y=mx-5$에 대입하면 $3=4m-5$에서 $m=2$이다.



| 정답 | (1) 4 (2) 2

돌다리 두드리기

세 점 $A(0, 1)$, $B(-5, 1)$, $C(-1, 3)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이를 직선 $y=mx+1$이 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기
| 답 | $-\frac{1}{3}$

직선 $y=mx+1$가 점 A를 지나므로, 선분 BC의 중점

$$\left(\frac{-5-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow (-3, 2)$$

를 지나야 한다. 즉, $2=-3m+1$에서 $m=-\frac{1}{3}$이다.

정답 및 풀이 p.562

개념 바꾸기

유제 03-1

− 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)
+ 두 점을 지나는 직선의 방정식(p.379)

세 점 A(3, 1), B(0, 3), C(4, −3)에 대하여 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

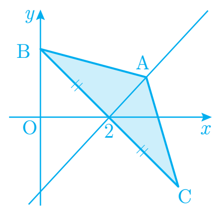
점 A를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 그림과 같이 선분 BC의 중점

$$\left(\frac{4-0}{2}, \frac{3-3}{2}\right) \Rightarrow (2, 0)$$

을 지나야 한다. 따라서 구하는 직선은 두 점 (2, 0), (3, 1)을 지나는 직선이므로

$$y-0=\frac{1-0}{3-2}(x-2)=x-2$$

에서 $y=x-2$이다.



답 $y=x-2$

개념 더하기

유제 03-2

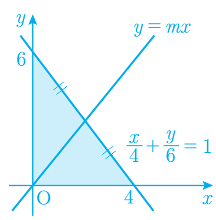
+ x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식(p.380)

직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, 상수 m의 값을 구하시오.

직선 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$은 x절편이 4, y절편이 6인 직선이다. 따라서 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 세 점

$$(0, 0), (4, 0), (0, 6)$$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다. 직선 $y=mx$가 점 (0, 0)을 지나고 삼각형의 넓이를 이등분하려면 그림과 같이 삼각형의 두 점 (4, 0), (0, 6)의 중점 (2, 3)을 지나야 한다. 따라서 (2, 3)을 $y=mx$에 대입하면 $3=2m$에서 $m=\frac{3}{2}$이다.



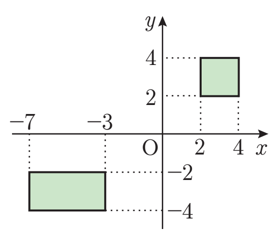
답 $m=\frac{3}{2}$

개념 바꾸기

유제 03-3

− 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)
+ 두 점을 지나는 직선의 방정식(p.379)

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 있는 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선을 구하시오.



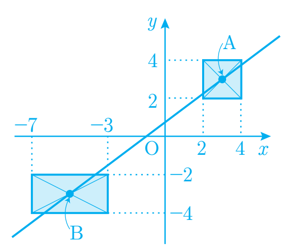
두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다. 그림과 같이 제1사분면에 있는 직사각형의 대각선의 교점을 A라 하고, 제3사분면에 있는 직사각형의 대각선의 교점을 B라 하자.

$$\mathrm{A}\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{A}(3, 3)$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{-3-7}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{B}(-5, -3)$$

이므로 구하는 직선의 방정식은 두 점 A(3, 3), B(−5, −3)을 지나는 방정식이다.
따라서

$$y-3=\frac{-3-3}{-5-3}(x-3) \Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$$



답 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$

직선이 항상 지나는 점

예제 04

두 직선 $y=-2x+4$, $mx-y+m+1=0$이 제1사분면에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

길잡이 직선 $m(x-x_1)+y-y_1=0$은 m의 값에 관계없이 점 (x_1, y_1)을 항상 지난다. 이와 같이 **직선이 항상 지나는 점은 문제를 푸는 열쇠**가 된다.

풀 이

1단계 직선 $mx-y+m+1=0$이 m의 값과 관계없이 지나는 점을 찾는다.

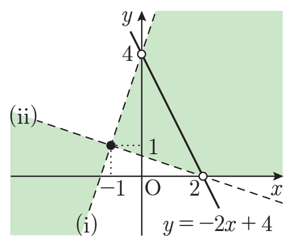
주어진 직선의 방정식 $mx-y+m+1=0$을 m에 대하여 정리하면

$$m(x+1)-(y-1)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로 이 직선은 m의 값과 관계없이 점 $(-1, 1)$을 지난다. 또한 ㉠을 표준형으로 나타내면 $y=mx+m+1$이므로 m은 직선 ㉠의 기울기이다.

2단계 점 $(-1, 1)$을 지나는 직선이 직선 $y=-2x+4$와 제1사분면에서 만나도록 하는 m의 범위를 구한다.

직선 ㉠이 직선 $y=-2x+4$와 제1사분면에서 만나려면 m의 값에 따라 그림과 같이 색칠한 영역에 직선 ㉠이 있어야 한다. 즉, 기울기 m이 두 점 $(-1, 1)$, $(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(-1, 1)$, $(2, 0)$을 지나는 직선의 기울기 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지날 때

$$m(0+1)-(4-1)=0 \quad \Rightarrow \quad m=3$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때

$$m(2+1)-(0-1)=0 \quad \Rightarrow \quad m=-\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 범위는 $-\frac{1}{3}<m<3$이다.

정답 $-\frac{1}{3}<m<3$

- 1 • m의 값에 관계없이 지나는 점(p.381)
  • 항등식의 성질 I(p.49)
- 2 • 두 점을 지나는 직선의 방정식(p.379)

돌다리 두드리기

직선 $y=-x+3$과 $mx-y+m+2=0$이 제1사분면에서 만날 때, 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $-\frac{1}{2}<m<1$

$mx-y+m+2=m(x+1)-(y-2)=0$ 이므로 m과 관계없이 점 $(-1, 2)$을 지난다. 이 직선이 직선 $y=-x+3$과 제1사분면에서 만나기 위해서는 점 $(0, 3)$을 지날 때의 m의 값 $m=1$과 점 $(3, 0)$을 지날 때의 m의 값 $m=-\frac{1}{2}$의 사이이므로 $-\frac{1}{2}<m<1$이다.

개념 그대로

유제 04-1

다음 조건을 만족하는 점 P의 좌표를 구하시오.

(1) 실수 k의 값에 관계없이 직선 $(2k-1)x+(k+2)y+(3k-4)=0$이 항상 지나는 점 P

(2) 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y=(k-4)x-2k+3$이 항상 지나는 점 P

(1) 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$(2x+y+3)k+(-x+2y-4)=0$$

이고 이것이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x+y+3=0, \quad -x+2y-4=0$$

을 만족해야 한다. 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$이므로 $\mathrm{P}(-2, 1)$이다.

(2) 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면

$$k(x-2)+(-4x-y+3)=0$$

이고 이것이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x=2, \quad -4x-y+3=0$$

을 만족해야 한다. 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-5$이므로 $\mathrm{P}(2, -5)$이다.

답 (1) $\mathrm{P}(-2, 1)$ (2) $\mathrm{P}(2, -5)$

개념 그대로

유제 04-2

직선 $mx-y+m-2=0$의 y절편이 -2 이상 -1 이하가 되도록 하는 m의 값의 범위를 구하시오.

주어진 직선의 방정식 $mx-y+m-2=0$을 m에 대하여 정리하면

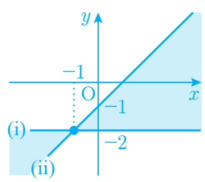
$$m(x+1)-(y+2)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로 이 직선은 m의 값과 관계없이 점 $(-1, -2)$를 지난다. 또한 ㉠을 표준형으로 나타내면 $y=mx+m-2$이므로 m은 직선 ㉠의 기울기이다.

(i) y절편이 -2일 때, 직선 ㉠에 $(0, -2)$를 대입하면 $m=0$이다.

(ii) y절편이 -1일 때, 직선 ㉠에 $(0, -1)$을 대입하면 $m=1$이다.

따라서 구하는 m의 값의 범위는 $0\le m\le 1$이다.



답 $0\le m\le 1$

개념 그대로

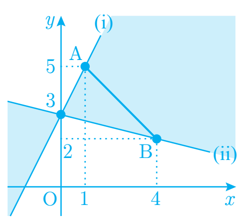
유제 04-3

직선 $y=kx+3$이 두 점 $\mathrm{A}(1, 5)$, $\mathrm{B}(4, 2)$를 이은 선분 AB와 한 점에서 만날 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

직선의 방정식

$$y=kx+3 \qquad \cdots ㉠$$

에서 이 직선은 기울기 k의 값과 관계없이 점 $(0, 3)$을 지난다. 따라서 직선 ㉠과 선분 AB가 한 점에서 만나기 위해서는 k의 값이 그림과 같이 두 점 $(0, 3)$, $\mathrm{A}(1, 5)$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(0, 3)$, $\mathrm{B}(4, 2)$를 지나는 직선의 기울기 또는 그 사이에 있어야 한다.



(i) ㉠이 점 $(1, 5)$를 지날 때

$$k\cdot 1+3=5 \quad \Rightarrow \quad k=2$$

(ii) ㉠이 점 $(4, 2)$를 지날 때

$$k\cdot 4+3=2 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 범위는 $-\frac{1}{4}\le k\le 2$이다.

답 $-\frac{1}{4}\le k\le 2$

11-2 두 직선의 위치 관계

두 직선의 위치 관계

좌표평면 위의 두 직선 l, l'의 위치 관계는 교점의 개수에 따라 다음과 같이 구분된다.

- 교점의 개수가 0개: 두 직선 l, l'은 서로 평행하다.
- 교점의 개수가 1개: 두 직선 l, l'은 한 점에서 만난다.
- 교점의 개수가 2개 이상: 두 직선 l, l'은 일치한다.

표준형으로 주어진 두 직선의 위치 관계

$l: y=mx+n$은 직선 l의 방정식이 $y=mx+n$임을 의미한다.

좌표평면 위의 두 직선

$$l: y=mx+n, \qquad l': y=m'x+n'$$

에 대하여 두 직선의 위치 관계를 알아보자.

- **두 직선이 서로 평행할 조건** 두 직선 l, l'이 서로 평행하면 두 직선의 기울기는 같고, y절편이 다르므로

$$m=m', \qquad n\neq n'$$

  이다. 반대로 $m=m'$이고 $n\neq n'$이면 두 직선 l, l'은 서로 평행하다.
- **두 직선이 일치할 조건** 두 직선 l, l'이 일치하면 두 직선의 기울기는 같고, y절편도 같으므로

$$m=m', \qquad n=n'$$

  이다. 반대로 $m=m'$이고 $n=n'$이면 두 직선 l, l'은 일치한다.
- **두 직선이 한 점에서 만날 조건** 두 직선 l, l'이 한 점에서 만나면 기울기가 서로 다르므로

$$m\neq m'$$

  이다. 반대로 $m\neq m'$이면 두 직선 l, l'은 한 점에서 만난다.

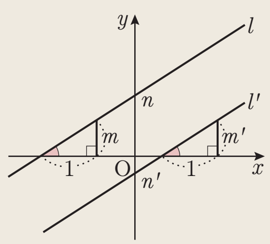


그림 11.6. 서로 평행한 두 직선 l, l'

포인트 상 11.7 **표준형으로 주어진 두 직선의 위치 관계**

좌표평면 위의 두 직선 $l: y=mx+n$, $l': y=m'x+n'$에 대하여

- **두 직선이 서로 평행하는 경우** $m=m'$, $n\neq n'$
- **두 직선이 일치하는 경우** $m=m'$, $n=n'$
- **두 직선이 한 점에서 만나는 경우** $m\neq m'$

예 시 　세 직선 $l_1 : y=2x+1$, $l_2 : y=2x+2$, $l_3 : y=x+1$에 대하여

(1) 두 직선 l_1, l_2는 기울기는 같고 y절편이 다르므로 서로 평행하다.

(2) 두 직선 l_1, l_3은 기울기가 다르므로 한 점에서 만난다.

보기 11.6 　기울기가 3인 직선과 평행하고 원점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

두 직선이 서로 수직일 조건

좌표평면 위의 두 직선 l, l'이 서로 수직일 조건을 알아보자. 두 직선

$$l : y=mx+n, \qquad l' : y=m'x+n' \qquad (mm' \neq 0)$$

이 서로 수직이면 두 직선 l, l'에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선

$$l_1 : y=mx, \qquad {l_1}' : y=m'x$$

도 서로 수직이다. 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$과 직선 l_1, ${l_1}'$의 교점을 각각 P, Q라 하면 $\mathrm{P}(1,\ m)$, $\mathrm{Q}(1,\ m')$이고 삼각형 OPQ는 직각삼각형이다. 따라서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2 \qquad \cdots(11.2.1)$$

이 성립한다. 이제 **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리**(p.353)를 이용하여 구한

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=1^2+m^2, \quad \overline{\mathrm{OQ}}^2=1^2+m'^2, \quad \overline{\mathrm{PQ}}^2=(m-m')^2$$

을 (11.2.1)에 대입하여 정리하면

$$(1+m^2)+(1+m'^2)=(m-m')^2 \quad \Rightarrow \quad mm'=-1$$

을 얻는다. 또한, $mm'=-1$이면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2&=(1+m^2)+(1+m'^2)=m^2+2+m'^2\\&=m^2-2mm'+m'^2=(m-m')^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2\end{aligned}$$

이므로 삼각형 OPQ는 각 POQ가 직각인 직각삼각형이다. 따라서 두 직선 l_1, ${l_1}'$은 서로 수직이고 두 직선 l, l'도 수직이다.

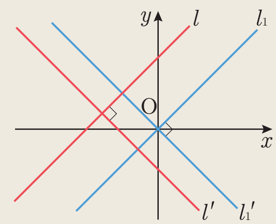


그림 11.7. 두 직선 l, l'이 서로 평행하면 두 직선 l_1, ${l_1}'$도 서로 평행하다.

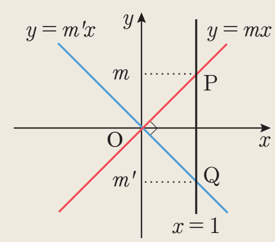


그림 11.8. 두 직선 $y=mx$, $y=m'x$와 직선 $x=1$의 교점은 각각 $\mathrm{P}(1,\ m)$, $\mathrm{Q}(1,\ m')$이다.

포인트 상 11.8 　**두 직선이 서로 수직일 조건**

좌표평면 위의 두 직선

$$l : y=mx+n, \qquad l' : y=m'x+n'$$

에 대하여 두 직선 l, l'이 서로 수직이다. $\Longleftrightarrow$ $mm'=-1$

예 시 　점 $(1,\ 0)$을 지나고 $y=\frac{1}{3}x$에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$$m \cdot \frac{1}{3}=-1 \quad \Rightarrow \quad m=-3$$

이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-3x+3$이다.

보기 정답

11.6 　$y=3x$

일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계

일반형으로 주어진 좌표평면 위의 두 직선

$$l : ax+by+c=0, \qquad l' : a'x+b'y+c'=0$$

에 대하여 두 직선의 위치 관계에 대하여 알아보자. 두 직선 l, l'은 각각 표준형으로 나타내면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}, \quad y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$$

이므로 두 직선의 기울기는 각각 $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$이고 y절편은 각각 $-\frac{c}{b}$, $-\frac{c'}{b'}$이다.

두 직선이 서로 평행할 조건 $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$이므로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$이다.

두 직선이 일치할 조건 $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}=-\frac{c'}{b'}$이므로 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$이다.

두 직선이 한 점에서 만날 조건 $-\frac{a}{b}\neq-\frac{a'}{b'}$,이므로 $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$이다.

두 직선이 서로 수직일 조건 $\left(-\frac{a}{b}\right)\times\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$이므로 $aa'+bb'=0$이다.

포인트 상 11.9

일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계

좌표평면 위의 두 직선 $l : ax+by+c=0$, $l' : a'x+b'y+c'=0$에 대하여

- **두 직선이 서로 평행하는 경우** $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
- **두 직선이 일치하는 경우** $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
- **두 직선이 한 점에서 만나는 경우** $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$
- **두 직선이 서로 수직인 경우** $aa'+bb'=0$

예시

두 직선 $l : ax+by+3=0$, $l' : 2x+y+2=0$에 대하여

(1) $\frac{a}{2}=\frac{b}{1}=\frac{3}{2}$인 경우, 즉 $a=3$, $b=\frac{3}{2}$이면 두 직선 l, l'은 일치한다.

(2) $a\cdot2+b\cdot1=0$인 경우, 즉 $b=-2a$이면 두 직선 l, l'은 서로 수직이다.

보기 11.7 두 직선 $ax+y+2=0$, $3x-y+1=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 직선이 서로 평행하기 위한 조건을 구하시오.

(2) 두 직선이 서로 수직이기 위한 조건을 구하시오.

보기 정답

11.7 (1) $a=-3$ (2) $a=\frac{1}{3}$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 다항식 A, B에 대하여 식 $A+kB=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하면 **항등식의 성질 I(p.49)**에 의하여 $A=0$, $B=0$임을 알 수 있다. 이를 이용하면 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다. k가 실수일 때, 방정식

$$x+y-3+k(3x+y+3)=0 \qquad \cdots (11.2.2)$$

을 생각해보자. (11.2.2)의 좌변을 전개하면

$$(3k+1)x+(k+1)y+(3k-3)=0$$

이고, 이는 x, y에 대한 일차방정식이므로 좌표평면에서 직선을 나타낸다. k의 값이 바뀔 때마다 직선의 방정식은 달라지지만 k의 값에 상관없이 점 $(-3,\ 6)$을 지남을 확인할 수 있다.

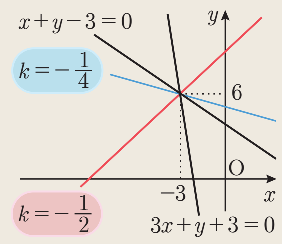


그림 11.9. k의 값에 따라 방정식 $x+y-3+k(3x+y+3)=0$은 다양한 직선을 나타낸다.

이제 (11.2.2)가 나타내는 직선이 k의 값과 상관없이 항상 지나는 점을 구해보자. k에 대한 항등식이므로

$$x+y-3=0, \qquad 3x+y+3=0$$

이 성립하여야 한다. 두 식을 연립하면 $x=-3$, $y=6$이므로 방정식 (11.2.2)가 나타내는 직선은 k의 값에 상관없이 점 $(-3,\ 6)$을 지난다. 이때 점 $(-3,\ 6)$은 두 직선

$$l : x+y-3=0, \qquad l' : 3x+y+3=0$$

의 교점이기도 하다. 따라서 직선의 방정식 (11.2.2)는 두 직선 l, l'의 교점을 지나는 직선의 방정식이다.

포인트 상 11.10 **두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식**

두 직선

$$l : ax+by+c=0, \qquad l' : a'x+b'y+c'=0$$

이 한 점에서 만날 때, x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

이 나타내는 도형은 실수 k의 값에 상관없이 두 직선 l, l'의 교점을 지나는 직선이다.

예 시 직선 $k(x-4)-y-2=0$은 k의 값에 상관없이 두 직선 $x=4$, $y=-2$의 교점 $(4,\ -2)$를 항상 지난다.

보기 11.8 직선 $(x-y+5)+k(x+y-3)=0$은 실수 k의 값에 상관없이 항상 일정한 점 P를 지난다. 이때 점 P의 좌표를 구하시오.

보기 정답

11.8 $\mathrm{P}(-1,\ 4)$

두 직선의 위치 관계

예제 05 두 직선 $ax+y+3=0$, $6x+(a+1)y+2a=0$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

(1) 두 직선이 서로 평행하다. (2) 두 직선이 일치한다.

(3) 두 직선이 서로 수직이다.

| 길잡이 | 좌표평면 위의 두 직선 $l: ax+by+c=0$, $l': a'x+b'y+c'=0$에 대하여

- 두 직선이 서로 평행하는 경우 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
- 두 직선이 일치하는 경우 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
- 두 직선이 서로 수직인 경우 $aa'+bb'=0$

임을 이용하여 위치 관계를 파악하자.

| 풀 이 |

• 일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.392)

(1) 주어진 두 직선이 평행하려면 $\frac{a}{6}=\frac{1}{a+1}\neq\frac{3}{2a}$이 성립해야 한다. 즉,

$$\frac{a}{6}=\frac{1}{a+1} \Rightarrow a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0 \qquad \cdots ㉠$$

$$\frac{1}{a+1}\neq\frac{3}{2a} \Rightarrow a\neq-3 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $a=-3$ 또는 $a=2$이고, ㉡에서 $a\neq-3$이므로 $a=2$이다.

(2) 주어진 두 직선이 일치하려면 $\frac{a}{6}=\frac{1}{a+1}=\frac{3}{2a}$이 성립해야 한다. 즉,

$$\frac{a}{6}=\frac{1}{a+1} \Rightarrow a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0 \qquad \cdots ㉢$$

$$\frac{1}{a+1}=\frac{3}{2a} \Rightarrow a=-3 \qquad \cdots ㉣$$

이다. ㉢에서 $a=-3$ 또는 $a=2$이고, ㉣에서 $a=-3$이므로 $a=-3$이다.

(3) 주어진 두 직선이 서로 수직이려면

$$a\cdot6+1\cdot(a+1)=0 \Rightarrow 7a+1=0$$

이므로 $a=-\frac{1}{7}$이다.

| 정답 | (1) 2 (2) -3 (3) $-\frac{1}{7}$

돌다리 두드리기

두 직선 $(a-3)x+y+2=0$, $x+(a-3)y-a=0$의 위치 관계가 다음과 같도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

(1) 두 직선이 서로 평행하다. (2) 두 직선이 일치한다.

(3) 두 직선이 서로 수직이다.

돌다리 두드리기

| 답 | (1) 4 (2) 2 (3) 3

(1) 두 직선이 서로 평행하려면 $a-3=\frac{1}{a-3}\neq-\frac{2}{a}$이다. $a-3=\frac{1}{a-3}$에서 $a=2,\ 4$이고 $\frac{1}{a-3}\neq-\frac{2}{a}$에서 $a\neq2$이므로 $a=4$이다.

(2) 두 직선이 서로 일치하려면 $a-3=\frac{1}{a-3}=\frac{2}{a}$이다. $a-3=\frac{1}{a-3}$에서 $a=2,\ 4$이고 $\frac{1}{a-3}=-\frac{2}{a}$에서 $a=2$이므로 $a=2$이다.

(3) 두 직선이 서로 수직이면 $(a-3)+(a-3)=2a-6=0$이므로 $a=3$이다.

개념 그대로

유제 05-1

다음 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 $(-1,\ 4)$, $(3,\ -4)$를 지나는 직선에 평행하고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$에 수직이고, x절편이 4인 직선

(1) 두 점 $(-1,\ 4)$, $(3,\ -4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-4-4}{3+1}=-2$이고, 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -2이다. 따라서 구하는 직선은 기울기가 -2이고 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$$y-2=-2(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=-2x+4$$

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $m\cdot\frac{1}{2}=-1$을 만족한다. 즉, $m=-2$이다. 따라서 구하는 직선은 기울기가 -2이고 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$$y-0=-2\cdot(x-4) \quad \Rightarrow \quad y=-2x+8$$

답 (1) $y=-2x+4$ (2) $y=-2x+8$

개념 그대로

유제 05-2

직선 $ax+by-1=0$이 직선 $x-2y+3=0$에 평행하고 직선 $2x+ay-4=0$에 수직일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

직선 $ax+by-1=0$이 직선 $x-2y+3=0$에 평행하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{-2}\neq\frac{-1}{3} \quad \Rightarrow \quad b=-2a,\ a\neq-\frac{1}{3} \qquad \cdots ㉠$$

이다. 직선 $ax+by-1=0$이 직선 $2x+ay-4=0$과 수직이므로, 두 직선 $x-2y+3=0$과 $2x+ay-4=0$도 서로 수직이다. 따라서

$$1\cdot2+(-2)\cdot a=0 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

이다. 이것을 ㉠에 대입하면 $b=-2$이다. 따라서 $a=1$, $b=-2$이다.

답 $a=1$, $b=-2$

개념 더하기

유제 05-3

+ 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$를 이은 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 방정식을 구하시오.

구하는 직선은 선분 AB의 중점을 지나고, 선분 AB와 수직인 직선이다. 먼저 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(-3,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{5-3}{-3-1}=-\frac{1}{2}$$

이다. 즉, 선분 AB를 수직이등분하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \quad \Rightarrow \quad m=2$$

이다. 또한 선분 AB의 중점의 좌표를 M이라 하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{1+(-3)}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$$

에서 $\mathrm{M}(-1,\ 4)$이다. 따라서 구하는 직선은 기울기가 2이고 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$$y-4=2(x+1) \quad \Rightarrow \quad y=2x+6$$

답 $y=2x+6$

예제 06 세 직선 $x+3y-2=0$, $2x-y+3=0$, $ax-y+4=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

길잡이 서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

- 세 직선이 모두 평행한 경우
- 세 직선 중 두 직선이 서로 평행한 경우
- 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

풀 이

1단계 세 직선이 모두 평행한 경우의 a의 값을 구한다.

두 직선 $x+3y-2=0$, $2x-y+3=0$은

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{-1}$$

이므로 서로 평행하지 않다. 따라서 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

2단계 세 직선 중 두 직선이 서로 평행한 경우의 a의 값을 구한다.

1단계에서 두 직선 $x+3y-2=0$, $2x-y+3=0$은 서로 평행하지 않으므로 다음 두 가지 경우를 생각하자.

(i) 두 직선 $x+3y-2=0$, $ax-y+4=0$이 서로 평행한 경우

$$\frac{1}{a}=\frac{3}{-1} \neq \frac{-2}{4} \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{1}{3},\ a \neq -2$$

이므로 $a=-\frac{1}{3}$이다.

(ii) 두 직선 $2x-y+3=0$, $ax-y+4=0$이 서로 평행한 경우

$$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad a=2,\ a \neq \frac{8}{3}$$

이므로 $a=2$이다.

3단계 세 직선이 한 점에서 만나는 경우의 a의 값을 구한다.

세 직선이 한 점에서 만나는 경우, 두 직선 $x+3y-2=0$, $2x-y+3=0$의 교점을 직선 $ax-y+4=0$이 지난다.

(iii) $x+3y-2=0$, $2x-y+3=0$을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$이다. 즉, 직선 $ax-y+4=0$이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 $-a-1+4=0$에서 $a=3$이다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 $-\frac{1}{3}+2+3=\frac{14}{3}$이다.

정답 $\frac{14}{3}$

- 1 • 일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.392)
- 2 • 일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.392)
- 3 • 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이(p.249)

돌다리 두드리기

세 직선 $3x-2y+2=0$, $x+y-6=0$, $ax+y+6=0$이 한 점에서 만나도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| -5

세 직선이 한 점에서 만나므로 직선 $3x-2y+2=0$, $x+y-6=0$의 교점 $(2,\ 4)$는 $ax+y+6=0$을 지나야 하므로 $2a+4+6=0$에서 $a=-5$이다.

정답 및 풀이 p.564

개념 더하기

유제 06-1

+ 인수분해를 통한 풀이(p.156)

세 직선 $x+2y+3=0$, $4x+y+5=0$, $(a+1)x-y+a^2-6=0$이 한 점에서 만나도록 하는 모든 상수 a의 값을 구하시오.

두 직선 $x+2y+3=0$, $4x+y+5=0$을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-1$이므로 두 직선의 교점은 $(-1,\ -1)$이다. 이 점을 직선

$$(a+1)x-y+a^2-6=0$$

이 지나므로

$$-(a+1)+1+a^2-6=0 \quad \Rightarrow \quad (a+2)(a-3)=0$$

에서 $a=-2$ 또는 $a=3$이다.

답 $a=-2$ 또는 $a=3$

개념 그대로

유제 06-2

서로 다른 세 직선 $ax+9y+5=0$, $2x+by-4=0$, $x-3y+3=0$에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어질 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.
먼저 두 직선 $ax+9y+5=0$, $x-3y+3=0$이 서로 평행해야 하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{9}{-3}\neq\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad a=-3,\ a\neq\frac{5}{3}$$

이다. 또한 두 직선 $2x+by-4=0$, $x-3y+3=0$도 서로 평행하므로

$$\frac{2}{1}=\frac{b}{-3}\neq\frac{-4}{3} \quad \Rightarrow \quad b=-6,\ b\neq 4$$

이다. 따라서 $a=-3$, $b=-6$이고 $ab=(-3)\cdot(-6)=18$이다.

답 18

개념 그대로

유제 06-3

세 직선 $2x-y-4=0$, $3x+2y-6=0$, $ax-6y-3=0$이 만나서 직각삼각형을 만들 때, 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

세 직선을 각각

$$2x-y-4=0 \quad \cdots ㉠$$
$$3x+2y-6=0 \quad \cdots ㉡$$
$$ax-6y-3=0 \quad \cdots ㉢$$

이라 하자. 세 직선의 교점을 이은 삼각형이 직각삼각형이 되기 위해서는 이 세 직선 중 어느 두 직선만이 서로 수직이 되어야 한다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉡은

$$2\cdot3+(-1)\cdot2=4$$

이므로 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(ii) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 수직일 때,

$$2\cdot a+6=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3$$

이다. 이때, 세 직선 중 두 직선 ㉠, ㉢만이 서로 수직이므로 문제의 조건을 만족한다.

(iii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 수직일 때,

$$3\cdot a-12=0 \quad \Rightarrow \quad a=4$$

이다. 이때, 세 직선 중 두 직선 ㉡, ㉢만이 서로 수직이므로 문제의 조건을 만족한다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 세 직선의 교점을 이은 삼각형이 직각삼각형이 되는 a의 값은 -3, 4이고 그 합은 $-3+4=1$이다.

답 1

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

예제 07 두 직선 $4x+3y-2=0$, $x+y+1=0$의 교점을 지나고 다음 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(1, 2)$를 지나는 직선　　(2) 직선 $2x-5y-6=0$과 평행한 직선

길잡이 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$$

이 나타내는 도형은 실수 k의 값에 상관없이 두 직선

$$l : ax+by+c=0, \quad l' : a'x+b'y+c'=0$$

의 교점을 지난다.

풀 이

• 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식(p.393)
• 일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.392)

공통 두 직선 $4x+3y-2=0$, $x+y+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$4x+3y-2+k(x+y+1)=0 \qquad \cdots ㉠$$

(1) ㉠이 점 $(1, 2)$를 지나므로

$$4+6-2+4k=0 \quad \Rightarrow \quad k=-2$$

이다. $k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$4x+3y-2-2(x+y+1)=2x+y-4=0$$

이고 이를 정리하면 $y=-2x+4$이다.

(2) ㉠을 정리하면

$$(k+4)x+(k+3)y+k-2=0$$

이고 이 직선이 직선 $2x-5y-6=0$과 서로 평행하므로

$$\frac{k+4}{2}=\frac{k+3}{-5}\neq\frac{k-2}{-6}$$

이다. $\frac{k+4}{2}=\frac{k+3}{-5}$에서 $k=-\frac{26}{7}$이고, ㉠에 대입하여 정리하면

$$4x+3y-2-\frac{26}{7}(x+y+1)=\frac{1}{7}(2x-5y-40)=0$$

이다. 따라서 $y=\frac{2}{5}x-8$이다.

정답 (1) $y=-2x+4$　(2) $y=\frac{2}{5}x-8$

돌다리 두드리기

두 직선 $x+5y+3=0$, $2x+y-6=0$의 교점과 점 $(3, -1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

구하는 직선의 방정식을 $x+5y+3+k(2x+y-6)=0$이라 할 때, $x=3$, $y=-1$을 대입하면 $k=1$이다. 따라서

$$x+5y+3+(2x+y-6)=3x+6y-3=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

개념 더하기

유제 07-1

+ 축에 평행한 직선의 방정식(p.378)

두 직선 $3x-4y+1=0$, $x+2y-5=0$의 교점을 지나고 다음 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) x축과 서로 수직인 직선　　(2) x축과 서로 평행한 직선

두 직선 $3x-4y+1=0$, $x+2y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$3x-4y+1+k(x+2y-5)=0$$
$$\Rightarrow\quad (k+3)x+(2k-4)y-5k+1=0 \qquad \cdots ㉠$$

(1) x축과 서로 수직인 직선은 $x=a$의 꼴이므로 y의 계수는 $2k-4=0$이다.
즉, $k=2$이다. 이것을 ㉠에 대입하면 주어진 직선의 방정식은 $x=\frac{9}{5}$ 이다.

(2) x축과 서로 평행한 직선은 $y=b$의 꼴이므로 x의 계수는 $k+3=0$이다.
즉, $k=-3$이다. 이것을 ㉠에 대입하면 주어진 직선의 방정식은 $y=\frac{8}{5}$이다.

답 (1) $x=\frac{9}{5}$　(2) $y=\frac{8}{5}$

개념 그대로

유제 07-2

두 직선 $x-2y+6=0$, $3x+2y+6=0$의 교점을 지나는 직선 l이 직선 $x-y+4=0$과 서로 수직일 때, 직선 l의 x절편을 구하시오.

두 직선 $x-2y+6=0$, $3x+2y+6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-2y+6+k(3x+2y+6)=0$$
$$\Rightarrow\quad (3k+1)x+(2k-2)y+6+6k=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 직선 ㉠이 직선 $x-y+4=0$과 서로 수직이므로

$$(3k+1)-(2k-2)=0 \quad \Rightarrow \quad k+3=0$$

에서 $k=-3$이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$x-2y+6-3(3x+2y+6)=-8x-8y-12=0$$

이므로 직선 l은 $y=-x-\frac{3}{2}$이다. 직선 l의 x절편을 a라 하면 직선 l이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$$0=-a-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{3}{2}$$

이다. 따라서 직선 l의 x절편은 $-\frac{3}{2}$이다.

답 $-\frac{3}{2}$

개념 그대로

유제 07-3

두 직선 $x+y-3=0$, $2x-4y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 x절편이 4일 때, y절편을 구하시오.

두 직선 $x+y-3=0$, $2x-4y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x+y-3+k(2x-4y-5)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 직선 ㉠의 x절편이 4이므로 $(4, 0)$을 ㉠에 대입하면

$$4+0-3+k(8-5)=0 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{1}{3}$$

이다. 직선 ㉠의 y절편을 b라 할 때, $(0, b)$를 ㉠에 대입하면

$$b-3-\frac{1}{3}(-4b-5)=0 \quad \Rightarrow \quad b-3=-\frac{1}{3}(4b+5)$$

이므로 $b=\frac{4}{7}$이다. 따라서 구하는 직선의 y절편은 $\frac{4}{7}$이다.

답 $\frac{4}{7}$

11-3 점과 직선 사이의 거리

점과 직선 사이의 거리

점과 직선 사이의 거리는 다음과 같이 정의한다.

정 의 상 11.11 **점과 직선 사이의 거리**

좌표평면 위의 한 점 P에서 점 P를 지나지 않는 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 PH의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 **거리**라 한다.

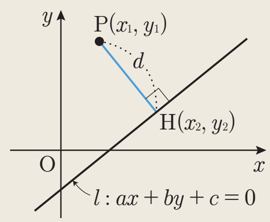


그림 11.10. 점 P와 직선 l 사이의 거리

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $l : ax+by+c=0$ 사이의 거리 d를 구해보자. 왼쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2, y_2)$라 할 때, **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)**를 이용하면

$$d=\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad \cdots (11.3.1)$$

이다. 즉, 수선의 발 H의 좌표를 구하면 거리 d를 구할 수 있다. a, b가 각각 0일 때와 0이 아닌 경우로 나누어서 구해보자.

- $a \neq 0$, $b \neq 0$인 경우, 직선 l을 y에 대한 식으로 나타내면 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이다. **직선 PH와 직선 l은 서로 수직(p.391)**이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이다. 따라서

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \quad b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0 \qquad \cdots (11.3.2)$$

이다. 또한 점 H는 직선 l 위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$이 성립한다. 이 식을 변형하면

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=-ax_1-by_1-c \qquad \cdots (11.3.3)$$

이다. 두 식 (11.3.2), (11.3.3)에서 $X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$이라 놓으면

$$\begin{cases} bX-aY=0 \\ aX+bY=-ax_1-by_1-c \end{cases}$$

와 같이 X, Y에 대한 연립방정식을 얻을 수 있다. X와 Y를 각각 구하면

$$\begin{aligned} X=x_2-x_1&=-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \\ Y=y_2-y_1&=-\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \end{aligned} \qquad \cdots (11.3.4)$$

이다. (11.3.4)를 (11.3.1)에 대입하면 식 (11.3.5)를 얻을 수 있다.

$$d=\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cdots (11.3.5)$$

- $a=0,\ b\neq 0$인 경우, 직선 l의 방정식은 $y=-\dfrac{c}{b}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=|y_1-y_2|=\left|y_1-\left(-\frac{c}{b}\right)\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

이다. 이것은 (11.3.5)에 $a=0$을 대입한 것과 같다.

- $a\neq 0,\ b=0$인 경우, 직선 l의 방정식은 $x=-\dfrac{c}{a}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=|x_1-x_2|=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

이다. 이것은 (11.3.5)에 $b=0$을 대입한 것과 같다.

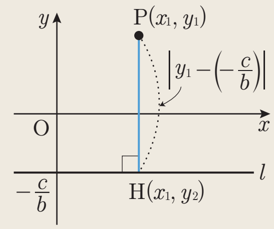


그림 11.11. $a=0,\ b\neq 0$인 경우

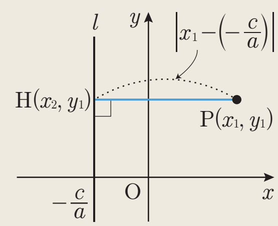


그림 11.12. $a\neq 0,\ b=0$인 경우

원점 O와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 (11.3.5)에 $x_1=0,\ y_1=0$을 대입하여 계산할 수 있다. 즉,

$$d=\frac{|a\cdot 0+b\cdot 0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다.

포인트 상 11.12 **점과 직선 사이의 거리**

- 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- 원점 O와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

예 시

점 $(1,\ 1)$과 직선 $4x+3y-2=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|4\cdot 1+3\cdot 1-2|}{\sqrt{4^2+3^3}}=\frac{5}{5}=1$$

보기 11.9 다음과 같이 좌표평면 위의 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

(1) 점 $(4,\ 3)$, 직선 $x-y+1=0$

(2) 점 $(0,\ 0)$, 직선 $3x+4y-5=0$

직선 $y=mx+n$의 경우 $ax+by+c=0$의 꼴로 고쳐서 푼다.

보기 정답

11.9 (1) $\sqrt{2}$ (2) 1

점과 직선 사이의 거리

예제 08 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(a,\ 1)$과 직선 $5x-12y+7=0$ 사이의 거리가 5일 때, a의 값을 구하시오.

(2) 두 직선 $3x+y-3=0$, $3x+y+7=0$ 사이의 거리를 구하시오.

길잡이

- 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- 평행한 두 직선 $l_1: ax+by+c_1=0$, $l_2: ax+by+c_2=0$ 사이의 거리 d는 직선 l_2 위의 한 점 $(p,\ q)$와 직선 l_1 사이의 거리와 같다. 즉,

$$d=\frac{|ap+bq+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

풀 이

- 점과 직선 사이의 거리(p.401)
- 절댓값(p.155)

(1) 점 $(a,\ 1)$과 직선 $5x-12y+7=0$의 거리는

$$\frac{|5\cdot a-12\cdot 1+7|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|5a-5|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|5a-5|}{13}=5$$

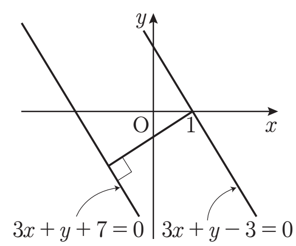
이다. 따라서

$$|5a-5|=65 \quad\Rightarrow\quad a-1=\pm 13$$

이므로 상수 a의 값은 $a=-12$ 또는 $a=14$이다.

(2) 주어진 두 직선은 기울기가 같으므로 서로 평행하다. 따라서 두 직선 사이의 거리는 $3x+y-3=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $3x+y+7=0$ 사이의 거리와 같다. 즉,

$$\frac{|1\cdot 3+0+7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$



[다른 풀이]

평행한 두 직선 $3x+y-3=0$, $3x+y+7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

정답 (1) $a=-12$ 또는 $a=14$ (2) $\sqrt{10}$

돌다리 두드리기

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2,\ a)$와 직선 $3x-4y-2=0$의 사이의 거리가 4일 때, a의 값을 구하시오.

(2) 두 직선 $2x-y-6=0$, $2x-y+9=0$ 사이의 거리를 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| (1) $a=-4$ 또는 $a=6$ (2) $3\sqrt{5}$

(1) 점 $(2,\ a)$와 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-4a-2|}{5}=4 \quad\Rightarrow\quad |4-4a|=20$$

이고 $|a-1|=5$에서 $a-1=\pm 5$이므로 $a=-4$ 또는 $a=6$

(2) 주어진 두 직선이 서로 평행하므로 직선 $2x-y-6=0$ 위의 한 점 $(3,\ 0)$과 직선 $2x-y+9=0$ 사이의 거리를 구하면

$$\frac{|15|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

정답 및 풀이 p.565

개념 그대로

유제 08-1

다음 물음에 답하시오.

(1) x축 위의 점 P와 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$일 때, 점 P를 구하시오.

(2) 원점과 직선 $x+2y+a=0$ 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$일 때 상수 a의 값을 구하시오.

(1) x축 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 0)$과 직선 $x+y-4=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|a-0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a-4|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

이고 $|a-4|=6$에서 $a-4=\pm6$이므로 a의 값은 $a=-2$ 또는 $a=10$이다.
즉, 점 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$ 또는 $\mathrm{P}(10,\ 0)$이다.

(2) 원점 $(0,\ 0)$과 직선 $x+2y+a=0$ 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$$

이고 $|a|=20$에서 $a=\pm20$이다.

답 (1) $\mathrm{P}(-2,\ 0)$ 또는 $\mathrm{P}(10,\ 0)$
(2) $a=-20$ 또는 $a=20$

개념 더하기

유제 08-2

+ 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식(p.393)

두 직선 $x-y+2=0,\ 3x-y-2=0$의 교점을 지나고 점 $(2,\ -1)$사이의 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 방정식을 구하시오.

두 직선 $x-y+2=0,\ 3x-y-2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-y+2+k(3x-y-2)=0$$

$$\Rightarrow\quad (3k+1)x-(k+1)y-(2k-2)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 직선과 점 $(2,\ -1)$사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|(3k+1)\cdot2-(k+1)\cdot(-1)-(2k-2)|}{\sqrt{(3k+1)^2+(k+1)^2}}=\frac{|5k+5|}{\sqrt{10k^2+8k+2}}=\sqrt{5}$$

에서 $|5k+5|=\sqrt{5}\sqrt{10k^2+8k+2}$이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$25k^2-10k-15=5(5k^2-2k-3)\ \Rightarrow\ (5k+3)(k-1)=0$$

이므로 $k=-\dfrac{3}{5}$ 또는 $k=1$이다.

(i) $k=-\dfrac{3}{5}$을 ㉠에 대입하면

$$-\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y+\frac{16}{5}=0$$

에서 $2x+y-8=0$이다.

(ii) $k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$4x-2y=0$$

에서 $2x-y=0$이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 직선의 방정식은 $2x+y-8=0$ 또는 $2x-y=0$이다.

답 $2x+y-8=0$ 또는 $2x-y=0$

개념 그대로

유제 08-3

서로 다른 두 직선 $x-2y+3=0,\ x-2y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 두 직선 $x-2y+3=0,\ x-2y+a=0$의 기울기가 같으므로 서로 평행하다. 따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3,\ 0)$과 직선 $x-2y+a=0$ 사이의 거리와 같고, 그 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|-3-0+a|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a-3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이다. 즉, $|a-3|=5$이므로 $a-3=\pm5$이다. 따라서 구하는 a의 값은 $a=-2$ 또는 $a=8$이다.

답 $a=-2$ 또는 $a=8$

점과 직선 사이의 거리의 활용

예제 09 다음 물음에 답하시오.

(1) 세 점 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

(2) 두 직선 $3x+4y-2=0$, $4x+3y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 모두 구하시오.

길잡이

(1) 삼각형 ABC의 넓이는 **두 꼭짓점 A, B 사이의 거리를 밑변의 길이, 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 높이**로 하여 계산한다.

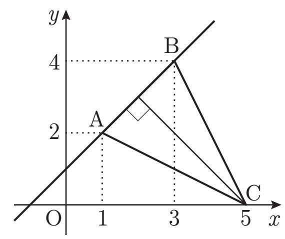
(2) 두 직선이 이루는 **각을 이등분하는 직선 위의 임의의 한 점을 P라 하면 점 P에서 두 직선까지의 거리는 같다.**

• 점과 직선 사이의 거리(p.401)
• 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

풀이

(1) 삼각형 ABC의 밑변을 변 AB로 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$$



이다. 한편, 삼각형의 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리이다. 이때 직선 AB의 방정식은

$$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y=x+1$$

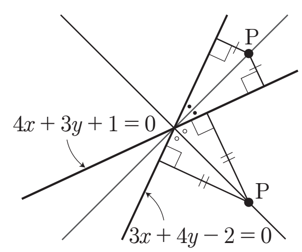
에서 직선 $x-y+1=0$과 점 $C(5, 0)$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

이므로 삼각형의 높이는 $3\sqrt{2}$이다. 따라서 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=6$이다.

(2) 각의 이등분선 위의 한 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P와 두 직선 사이의 거리는

$$\frac{|3x+4y-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$



에서 $|3x+4y-2|=|4x+3y+1|$이다. 절댓값을 풀면 $3x+4y-2=\pm(4x+3y+1)$이고, 각각의 경우에 직선의 방정식을 구하면

$$3x+4y-2=4x+3y+1 \quad \Rightarrow \quad x-y+3=0$$
$$3x+4y-2=-4x-3y-1 \quad \Rightarrow \quad 7x+7y-1=0$$

이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $x-y+3=0$ 또는 $7x+7y-1=0$이다.

정답 (1) 6 (2) $x-y+3=0$ 또는 $7x+7y-1=0$

돌다리 두드리기

세 점 $A(3, -1)$, $B(2, 1)$, $C(0, -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| 4

$\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$이고 직선 AB의 방정식은

$$y+1=\frac{1+1}{2-3}(x-3)$$

에서 $y=-2x+5$이므로 높이는 점 $(0, -3)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리이다.

즉, $\frac{|-3-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$이다. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{8}{\sqrt{5}}=4$이다.

정답 및 풀이 p.565

개념 그대로

유제 09-1

세 점 A(1, 5), B(−2, 1), C(−3, a)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

삼각형 ABC의 밑변을 변 AB로 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-5)^2}=5$$

이다. 삼각형의 높이는 직선 AB와 점 C 사이의 거리이다. 직선 AB의 방정식은

$$y-5=\frac{1-5}{-2-1}(x-1) \quad \Rightarrow \quad 4x-3y+11=0$$

이고 점 $(-3, a)$와 직선 $4x-3y+11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-12-3a+11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3a+1|}{5}$$

이다. 이때 삼각형 ABC의 넓이는 4이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{|3a+1|}{5}=4 \quad \Rightarrow \quad |3a+1|=8$$

이다. 즉, $3a+1=\pm 8$이므로 $a=-3$ 또는 $a=\frac{7}{3}$이다.

답 $a=-3$ 또는 $a=\frac{7}{3}$

개념 그대로

유제 09-2

세 점 O(0, 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$임을 보이시오.

삼각형 OAB의 밑변을 변 AB로 놓으면

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다. 한편, AB의 방정식은

(i) $x_1\neq x_2$일 때,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

이고, 양변에 x_2-x_1을 곱하여 정리하면

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 삼각형의 높이는 직선 ㉠과 원점 사이의 거리이므로

$$\frac{|-(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

이므로 삼각형 OAB의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$
$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

(ii) $x_1=x_2$일 때, $\overline{AB}=|y_2-y_1|$이고 삼각형의 높이는 $|x_1|$이므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times|x_1|\times|y_2-y_1|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_1y_1|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$이다.

(i), (ii)에 의하여 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$이다.

답 풀이 참조

개념 그대로

유제 09-3

두 직선 $x-2y+a=0$, $2x+y-3=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점 (3, 4)를 지날 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

점 (3, 4)가 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점이므로, 점 (3, 4)와 두 직선 사이의 거리가 서로 같다. 즉,

$$\frac{|3-8+a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|6+4-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} \quad \Rightarrow \quad |a-5|=7$$

에서 $a-5=\pm 7$이다. 따라서 $a=-2$ 또는 $a=12$이므로 모든 실수 a의 값의 합은 10이다.

답 10

연습은 실전처럼

11-1 직선의 방정식 [1-5]

기울기가 3이고 x절편이 -2인 직선의 방정식이 점 $(a, -3)$을 지날 때, 실수 a의 값을 구하시오.

구하는 직선의 기울기가 3이므로 $y=3x+b$라 하면 x절편이 -2, 즉 점 $(-2, 0)$을 지나므로 $0=-6+b$에서 $b=6$이다. 따라서 구하는 **직선의 방정식(p.379)**은 $y=3x+6$이고 이 직선이 점 $(a, -3)$을 지나므로 $3a+6=-3$에서 $a=-3$이다.

답 -3

11-2

두 점 $(1, 5)$, $(4, -1)$을 이은 선분을 $1:2$로 내분하는 점을 A라 하고 두 점 $(3, 0)$, $(5, -1)$을 이은 선분을 $2:1$로 외분하는 점을 B라 할 때, 직선 AB의 방정식을 구하시오.

두 점 $(1, 5)$, $(4, -1)$을 이은 선분을 $1:2$로 **내분(p.363)**하는 점은

$$\mathrm{A}\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot 1}{1+2}, \frac{1\cdot(-1)+2\cdot 5}{1+2}\right)$$

에서 $\mathrm{A}(2, 3)$이고 두 점 $(3, 0)$, $(5, -1)$을 이은 선분을 $2:1$로 **외분(p.362)**하는 점은

$$\mathrm{B}\left(\frac{2\cdot 5-1\cdot 3}{2-1}, \frac{2\cdot(-1)-1\cdot 0}{2-1}\right)$$

에서 $\mathrm{B}(7, -2)$이므로 **직선 AB의 방정식(p.379)**은

$$y-3=\frac{3+2}{2-7}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-3=-x+2$$

를 정리하면 $y=-x+5$이다.

답 $y=-x+5$

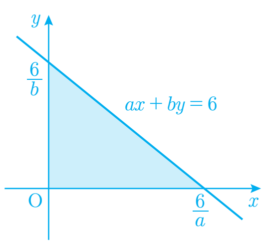
11-3

두 양수 a, b에 대하여 직선 $ax+by=6$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 6일 때, ab의 값을 구하시오.

직선 $ax+by=6$의 양변을 6으로 나누면 $\frac{ax}{6}+\frac{by}{6}=1$이므로 **$x$절편과 y절편(p.380)**은 각각 $\frac{6}{a}$, $\frac{6}{b}$이다. 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내면 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{a}\cdot\frac{6}{b}=6$$

이므로 구하는 값은 $ab=3$이다.



답 3

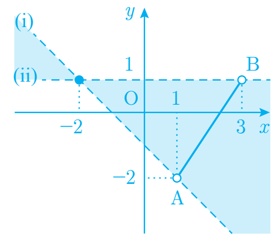
11-4

직선 $y=m(x+2)+1$이 두 점 $\mathrm{A}(1, -2)$, $\mathrm{B}(3, 1)$ 사이를 지나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하시오.

주어진 직선

$$y=m(x+2)+1 \quad \cdots ㉠$$

은 **실수 m의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(-2, 1)$을 지난다.(p.381)** 그림과 같이 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나기 위해서는 m의 값이 점 $\mathrm{A}(1, -2)$를 지날 때의 m의 값과 점 $\mathrm{B}(3, 1)$을 지날 때의 m의 값 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(1, -2)$를 지날 때의 m의 값은

$$-2=3m+1 \quad \Rightarrow \quad m=-1$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(3, 1)$을 지날 때의 m의 값은

$$1=5m+1 \quad \Rightarrow \quad m=0$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 범위는 $-1<m<0$이다.

답 $-1<m<0$

11-5

직선 $y=mx+3m+2$가 상수 m의 값에 관계없이 항상 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다. $\mathrm{A}(1, 3)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하시오.

점 $\mathrm{C}(a, b)$라 놓으면 선분 AC의 **중점(p.363)**의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$$

이다. 이 점이 직선 $y=mx+3m+2$를 지나므로 대입하면

$$\frac{3+b}{2}=m\cdot\frac{1+a}{2}+3m+2$$

이다. 식을 전개하여 m에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$(7+a)m+1-b=0$$

이다. 이 식이 m의 값에 관계없이 성립하려면 **항등식의 성질(p.49)**에 의해

$$7+a=0, \quad 1-b=0$$

이어야 한다. 즉, $a=-7$, $b=1$이고 따라서 점 C의 좌표는 $(-7, 1)$이다.

답 $\mathrm{C}(-7, 1)$

11-6 두 직선의 위치 관계 [6-9]

두 점 $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(6, -1)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선의 y절편을 구하시오.

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하자.

(i) 직선 l과 선분 AB가 **수직(p.391)**이고 선분 AB의 기울기는 $\frac{-1-1}{6-2}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 기울기는 2이다.

(ii) 직선 l이 선분 AB의 **중점(p.363)** $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(4, 0)$을 지난다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 **수직이등분선 l의 방정식(p.379)**은 $y=2(x-4)=2x-8$이므로 이 직선의 y절편은 -8이다.

답 -8

11-7

세 직선 l, m, n의 방정식은 다음과 같다.

$$l : ax-3y+4=0$$
$$m : x+by+6=0$$
$$n : 2x-(b-2)y+5=0$$

두 직선 l과 m은 서로 수직이고 두 직선 m과 n은 서로 평행할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

직선 $l : ax-3y+4=0$과 직선 $m : x+by+6=0$이 **서로 수직(p.391)**이므로

$$a-3b=0 \quad \Rightarrow \quad a=3b$$

이고, 직선 $m : x+by+6=0$과 직선 $n : 2x-(b-2)y+5=0$이 **서로 평행(p.390)**하므로

$$\frac{1}{2}=\frac{b}{-(b-2)}\neq\frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{2}{3}$$

이다. 따라서 $a=2$, $b=\frac{2}{3}$이므로 구하는 값은 $a+b=\frac{8}{3}$이다.

답 $\frac{8}{3}$

11-8

세 직선 $y=x+3$, $y=-2x+12$, $y=mx+4$가 삼각형을 만들지 않도록 하는 모든 실수 m의 값의 곱을 구하시오

세 직선을 각각 $\begin{cases} y=x+3 & \cdots ㉠ \\ y=-2x+12 & \cdots ㉡ \\ y=mx+4 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 이라 하자. 이 세 직선이 삼각형을 만들지 않으려면 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 서로 **평행(p.390)**하거나 일치해야 한다.

(i) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우 ㉠, ㉡의 교점은 $(3, 6)$이고 이 점이 ㉢이 지나야 하므로 $6=3m+4$에서 $m=\frac{2}{3}$이다.

(ii) ㉠, ㉡은 기울기가 다르므로 평행하지 않는다.

(iii) ㉠, ㉢이 평행하거나 일치하는 경우 이 두 직선의 기울기가 같으므로 $m=1$이다.

(iv) ㉡, ㉢이 평행하거나 일치하는 경우 이 두 직선의 기울기가 같으므로 $m=-2$이다.

(i)~(iv)에서 $m=\frac{2}{3}$ 또는 $m=1$ 또는 $m=-2$이므로 모든 실수 m의 곱은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 $-\frac{4}{3}$

11-9

두 직선 $x+y+1=0$, $ax-y+2=0$의 교점을 지나고, 직선 $2x+y+6=0$에 수직인 직선이 점 $(3, 2)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

두 직선 $x+y+1=0$, $ax-y+2=0$의 **교점을 지나는 직선의 방정식(p.393)**은 다음과 같다.

$$ax-y+2+k(x+y+1)=(a+k)x+(k-1)y+k+2=0 \qquad \cdots ㉠$$

이 직선이 직선 $2x+y+6=0$과 서로 **수직(p.391)**이므로

$$2(a+k)+(k-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3k+2a-1=0 \qquad \cdots ㉡$$

이고 점 $(3, 2)$를 지나므로 이를 ㉠에 대입하면

$$3(a+k)+2(k-1)+k+2=0 \quad \Rightarrow \quad 6k+3a=0 \qquad \cdots ㉢$$

이다. ㉡, ㉢을 연립하면 $k=-1$이고 $a=2$임을 알 수 있다.

답 2

11-10 점과 직선 사이의 거리 [10-12]

두 점 $A(2, -1)$, $B(1, 2)$를 이은 선분을 $1:2$로 외분하는 점과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리가 5일 때, 실수 k의 값을 구하시오.

두 점 $A(2, -1)$, $B(1, 2)$를 이은 선분을 $1:2$로 **외분(p.364)**하는 점은

$$\left(\frac{1-4}{-1}, \frac{2+2}{-1}\right)$$

에서 $(3, -4)$이고 이 점과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 **거리(p.401)**가 5이므로

$$\frac{|12+12+k|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|24+k|}{5}=5$$

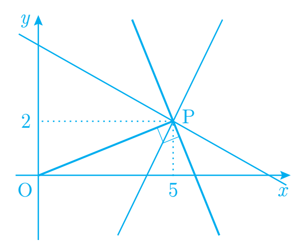
이므로 $|24+k|=25$에서 $k=1$ 또는 $k=-49$이다.

답 $k=1$ 또는 $k=-49$

11-11

점 $P(5, 2)$를 지나는 직선 중 원점으로부터의 거리가 최대인 직선의 기울기를 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

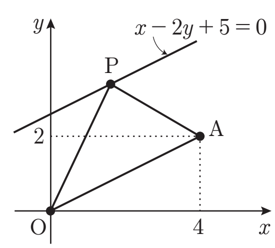
점 $P(5, 2)$를 지나는 직선 중에서 원점 $(0, 0)$으로부터의 **거리(p.401)**가 최대인 직선은 직선 OP와 서로 **수직(p.391)**인 것이다. 따라서 직선 OP의 기울기가 $\frac{2}{5}$이므로 구하는 직선의 기울기는 $m=-\frac{5}{2}$가 되어 $m^2=\frac{25}{4}$이다.



답 $\frac{25}{4}$

11-12

그림과 같이 두 점 $O(0, 0)$, $A(4, 2)$와 직선 $x-2y+5=0$ 위의 한 점 P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAP의 넓이를 구하시오.



직선 OA와 직선 $x-2y+5=0$의 기울기가 $\frac{1}{2}$로 같으므로 서로 평행하다. 삼각형 OAP에서 선분 OA를 밑변으로 하면 원점과 직선 $x-2y+5=0$ 사이의 **거리(p.401)**가 높이가 된다.

$$\overline{OA}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

이고, 원점과 직선 $x-2y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

이다. 따라서 삼각형 OAP의 넓이는 다음과 같다.

$$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$$

답 5

실전은 연습처럼

11-1

점 $(1,\ 1)$을 지나는 직선 $ax+by+2=0$에 대하여 원점 O와 이 직선 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$일 때, 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오.

직선 $ax+by+2=0$이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 대입하면

$$a+b+2=0$$

에서 $a+b=-2$이다. 원점 O와 직선 $ax+by+2=0$ 사이의 **거리(p.400)**가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

을 만족한다. 식을 정리하면

$$a^2+b^2=10$$

이므로 **곱셈 공식의 변형(p.23)** 을 이용하면

$$\begin{aligned}2ab&=(a+b)^2-(a^2+b^2)\\&=(-2)^2-10=-6\end{aligned}$$

에서 $2ab=-6$이므로 $ab=-3$이다.

답 -3

11-2

점 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x+4$ 위를 움직일 때, 직선 $y=-ax+2b$는 항상 일정한 점 $(p,\ q)$를 지난다. 이때 상수 $p,\ q$의 합 $p+q$의 값을 구하시오.

점 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x+4$ 위를 움직이므로 $b=2a+4$이다. 이를 직선 $y=-ax+2b$에 대입하면

$$y=-ax+2(2a+4) \quad\Rightarrow\quad a(x-4)+y-8=0$$

이고 **이 직선이 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점(p.381)**은 두 직선 $x-4=0$, $y-8=0$의 교점이므로

$$x=4,\quad y=8$$

이다. 따라서 $p=4$, $q=8$이므로 $p+q=12$이다.

답 12

11-3

이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$에서 접하는 직선과 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

점 P에서 이차함수 $y=x^2-2x+2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 놓자.
이 직선이 점 $(2,\ 2)$를 지나므로 $2a+b=2$에서 $b=-2a+2$이고 직선 $y=ax-2a+2$가 이차함수 $y=x^2-2x+2$와 **접한다.(p.194)** 따라서

$$x^2-2x+2=ax-2a+2 \quad\Rightarrow\quad x^2-(a+2)x+2a=0$$

에서 이차방정식 $x^2-(a+2)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-8a=0 \quad\Rightarrow\quad a^2-4a+4=0$$

가 성립한다. 즉, $a=2$이다. 이때 구하는 **직선의 방정식(p.379)**은 직선 $y=2x-2$와 **수직(p.391)**인 직선, 즉 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(2,\ 2)$를 지나는 직선이므로 다음과 같다.

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+2 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}x+3$$

답 $y=-\frac{1}{2}x+3$

11-4

점 P가 직선 $3x-4y-7=0$ 위를 움직일 때, 점 P와 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 이은 선분의 중점 Q가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

직선 $3x-4y-7=0$ 위의 한 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$3a-4b-7=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 선분 AP의 **중점(p.363)**을 $\mathrm{Q}(x',\ y')$이라 하면

$$x'=\frac{a+3}{2},\quad y'=\frac{b+1}{2}$$

이고 이를 정리하면

$$a=2x'-3,\quad b=2y'-1$$

이다. 점 $(a,\ b)$를 ㉠에 대입하면

$$3(2x'-3)-4(2y'-1)-7=6x'-8y'-12=0$$
$$3x'-4y'-6=0$$

이므로 구하는 **도형의 방정식(p.381)**은 $3x-4y-6=0$이다.

답 $3x-4y-6=0$

정답 및 풀이 p.567

11-5

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 한 점 P와 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

이차함수 $y=x^2$ 위의 한 점 $P(t,\ t^2)$에 대하여 점 P와 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 **거리(p.400)**는

$$\frac{|2t-t^2-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|(t-1)^2+5|}{\sqrt{5}}$$

이다. 즉, 점 P와 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는 $t=1$일 때, 즉 $P(1,\ 1)$일 때 **최솟값(p.203)** $\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$를 갖는다.

답 $\sqrt{5}$

11-7

세 직선 $y=x+2$, $y=-x+4$, $y=2x-11$로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

각각의 직선을

$y=x+2$ $\cdots$ ㉠

$y=-x+4$ $\cdots$ ㉡

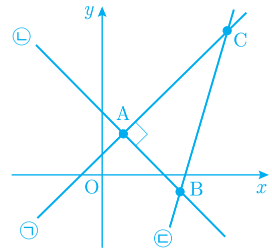
$y=2x-11$ $\cdots$ ㉢

이라 하면 각각의 직선의 교점은 다음과 같다.

두 직선 ㉠, ㉡의 교점: $A(1,\ 3)$

두 직선 ㉡, ㉢의 교점: $B(5,\ -1)$

두 직선 ㉠, ㉢의 교점: $C(13,\ 15)$



이때, 두 직선 ㉠, ㉡은 서로 **수직(p.391)**이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(13-1)^2+(15-3)^2}=12\sqrt{2}$$

이고 구하는 삼각형의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\cdot12\sqrt{2}=48$$

답 48

11-6

좌표평면 위의 네 점 $A(3,\ 4)$, $B(5,\ 1)$, $C(0,\ 3)$, $D(-1,\ -2)$에 대하여 직선 $y=mx-2m+1$이 두 선분 AB, CD와 각각 한 점에서 만날 때, 실수 m의 범위를 구하시오.

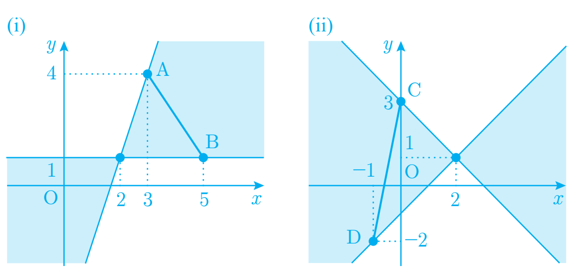
주어진 직선의 방정식 $y=mx-2m+1$를 m에 대하여 정리하면

$$m(x-2)-(y-1)=0 \quad \cdots ㉠$$

이고 이 직선은 기울기 m**의 값과 관계없이 항상 점** $(2,\ 1)$**을 지나는 직선(p.381)**이다.

(i) 직선 $y=mx-2m+1$이 선분 AB와 한 점에서 만나기 위해서는 그림과 같이 m의 값이 두 점 $(2,\ 1)$, $A(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기 3보다 작거나 같고 두 점 $(2,\ 1)$, $B(5,\ 1)$을 지나는 직선의 기울기 0보다 크거나 같아야 한다.
즉, $0\le m\le3$이어야 한다.

(ii) 직선 $y=mx-2m+1$이 선분 CD와 한 점에서 만나기 위해서는 그림과 같이 m의 값이 두 점 $(2,\ 1)$, $C(0,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기 -1보다 크거나 같고 두 점 $(2,\ 1)$, $D(-1,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기 1보다 작거나 같아야 한다.
즉, $-1\le m\le1$이어야 한다.

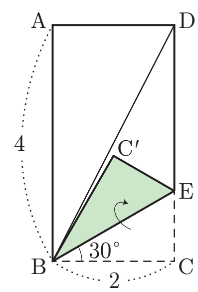


(i), (ii)에 의하여 직선 $y=mx-2m+1$이 두 선분 AB, CD와 각각 한 점에서 만날 때, 실수 m의 범위는 $0\le m\le1$이다.

답 $0\le m\le1$

11-8 교육청 기출

그림과 같이 직사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 각 꼭짓점을 A, B, C, D라 하면 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$이다. $\angle EBC=30°$가 되도록 변 CD 위에 점 E를 정하고 선분 BE를 따라 이 종이를 접으면 점 C는 점 C′으로 옮겨진다. 점 C′과 대각선 BD 사이의 거리를 구하시오.

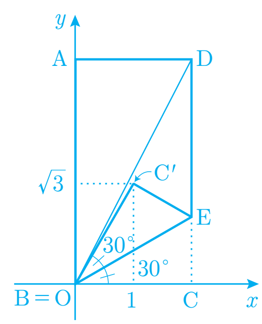


좌표평면 위에 점 B가 원점과 일치하도록 직사각형 모양의 종이를 놓으면

$$\angle C'BC=60°$$

이다. C′의 좌표는 $(1,\ \sqrt{3})$이고 직선 BD의 방정식은 $y=2x$이다. 따라서 구하는 점 C′과 직선 BD 사이의 **거리(p.400)** d는

$$d=\frac{|2-\sqrt{3}|}{\sqrt{4+1}}=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$$



답 $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$

12 원의 방정식

정의 & 포인트 확인

- 원
- 원의 방정식의 표준형
- 원의 방정식의 일반형
- 세 점을 지나는 원의 방정식
- 좌표축에 접하는 원의 방정식

- 두 점으로부터 거리의 비가 일정한 원

- 원과 직선의 위치 관계
- 중심거리
- 두 원의 위치 관계
- 공통현
- 공통현의 방정식

- 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

- 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식
- 원 위의 점에서의 접선의 방정식
- 접점을 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식
- 기울기를 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

12-1 원의 방정식

원의 방정식

평면 위의 한 정점에서 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형을 원이라 한다. 이때 정점을 원의 중심, 일정한 거리를 원의 반지름의 길이라 한다.

이 책에서는 반지름의 길이가 양수인 원만을 다루기로 한다.

정 의 상 12.1 **원**

평면 위의 한 정점에서 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형을 **원**이라 한다. 이때 정점을 **원의 중심**, 일정한 거리를 **원의 반지름의 길이**라 한다.

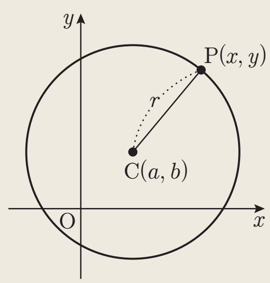


그림 12.1. 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 원

좌표평면 위에서 한 점 C$(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구해보자. 원 위의 임의의 점을 P$(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=r$이므로 **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리****(p.353)**를 이용하면

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots(12.1.1)$$

이다. 또한 방정식 (12.1.1)을 만족시키는 점 P$(x,\ y)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

이므로 점 P$(x,\ y)$는 점 C$(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위에 있다. 따라서 (12.1.1)이 구하는 원의 방정식이고, 이 방정식을 원의 방정식의 표준형이라 한다. 특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 (12.1.1)에서 $a=b=0$인 경우이므로 $x^2+y^2=r^2$이다.

포인트 상 12.2 **원의 방정식의 표준형**

점 C$(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

이다. 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

이다.

예 시 | 중심이 $(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-0)^2+(y-1)^2=2^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-1)^2=4$$

보기 12.1 다음 조건을 만족하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 점 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 3인 원

(2) 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원

원의 방정식의 일반형

원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 우변을 좌변으로 이항하여 전개하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이므로, $A=-2a,\ B=-2b,\ C=a^2+b^2-r^2$이라 하면 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad \cdots (12.1.2)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이와 같은 꼴을 원의 방정식의 일반형이라 한다. 반대로 (12.1.2)를 완전제곱의 꼴로 변형하면

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

이다. 이때 $A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 (12.1.2)는

$$\text{중심: } \left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right), \qquad \text{반지름의 길이: } \frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$$

인 원을 나타낸다.

포인트 상 12.3 **원의 방정식의 일반형**

방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$은

$$\text{중심: } \left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right), \qquad \text{반지름의 길이: } \frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$$

인 원이다. (단, $A^2+B^2-4C>0$)

예 시 | 방정식 $x^2-2x+y^2-3=0$은 $(x-1)^2+y^2=2^2$에서 중심이 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

보기 12.2 원의 방정식 $x^2+y^2+2x-4y-9=0$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 주어진 방정식을 표준형으로 고치시오.

(2) 원의 중심과 반지름의 길이를 구하시오.

원의 방정식의 특징

항 x^2, y^2의 계수가 같고 xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식의 꼴이다.

원이 존재하기 위한 조건

$A^2+B^2-4C=0$이면 방정식 (12.1.2)를 나타내는 좌표평면 위의 점은 $(a,\ b)$ 하나이고, $A^2+B^2-4C<0$이면 방정식 (12.1.2)를 나타내는 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$는 존재하지 않는다.

보기 정답

12.1 (1) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$
(2) $x^2+y^2=5$

12.2 (1) $(x+1)^2+(y-2)^2=14$
(2) 원의 중심: $(-1,\ 2)$,
반지름의 길이: $\sqrt{14}$

세 점을 지나는 원의 방정식

좌표평면에서 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(0,\ 2)$를 지나는 원의 방정식을 구해 보자. 구하고자 하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$\begin{cases} C=0 \\ A+B+C=-2 \\ 2B+C=-4 \end{cases}$$

로 **미지수가 3개인 연립일차방정식(p.250)**이 된다. 연립방정식을 풀면

$$A=0,\quad B=-2,\quad C=0$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2y=0$$

이고 표준형으로 바꾸면 $x^2+(y-1)^2=1$이다.

포인트 상 12.4 **세 점을 지나는 원의 방정식**

구하려는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입한 후 연립일차방정식을 풀어 세 상수 A, B, C의 값을 구한다.

보기 12.3 세 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 1)$, $(2,\ 4)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

다른 풀이

구하고자 하는 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 세 점 $\mathrm{P}(0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(1,\ 1)$, $\mathrm{R}(0,\ 2)$는 원 위의 점이므로 각각의 점과 중심 사이의 거리가 반지름의 길이 r로 같다.

$$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$$
$$\overline{\mathrm{CR}}=\sqrt{a^2+(b-2)^2}$$

이고

$$\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CR}}$$

이다. 이제 a, b에 대한 연립방정식을 제곱하여 풀면 $a=0$, $b=1$이고, 반지름의 길이 r는

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0^2+1^2}=1$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2=1$$

이다.

좌표축에 접하는 원의 방정식

좌표축에 접하는 원은 중심의 좌표를 이용하여 반지름의 길이를 알 수 있다.

- 중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|b|$이므로 원의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$
- 중심이 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|a|$이므로 원의 방정식은
$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$
- x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이 r는
$$r=|\text{중심의 } x\text{좌표}|=|\text{중심의 } y\text{좌표}|$$

이므로 원의 중심이 어떤 사분면에 위치하는지에 따라 원의 방정식이 달라진다.

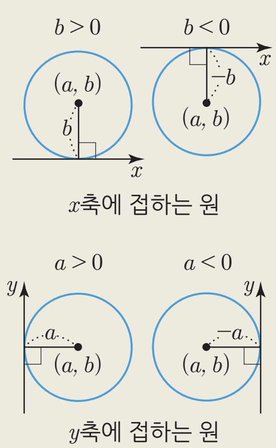


그림 12.2. x축 또는 y축에 접하는 원

보기 정답

12.3 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

포인트 상 12.5

좌표축에 접하는 원의 방정식

중심의 좌표가 (a, b)이고 좌표축에 접하는 원의 방정식은 중심의 좌표와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

- x축에 접하는 원의 방정식

  반지름의 길이 $=$ |중심의 y좌표| $= |b| \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2+(x-b)^2=b^2$

- y축에 접하는 원의 방정식

  반지름의 길이 $=$ |중심의 x좌표| $= |a| \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2+(x-b)^2=a^2$

- x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식

  반지름의 길이 $=$ |중심의 x좌표| $=$ |중심의 y좌표| $= |a| = |b|$

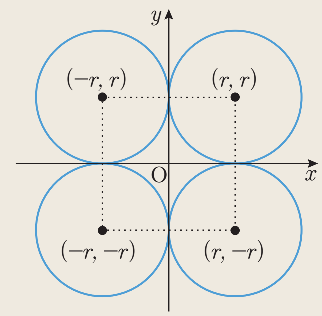


그림 12.3. x축과 y축에 동시에 접하는 원

보기 12.4 다음 조건을 만족시키는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심의 좌표가 $(3, 4)$이고 x축에 접하는 원

(2) 중심의 좌표가 $(-2, -2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원

두 점으로부터 거리의 비가 일정한 원

좌표평면의 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$으로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점이 나타내는 도형을 구해보자. 구하는 도형 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$, 즉 $2\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}$이다. 따라서

$$2\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \qquad \cdots (12.1.3)$$

이 성립하고 (12.1.3)의 양변을 제곱하여 전개하면

$$(x-5)^2+y^2=4 \qquad \cdots (12.1.4)$$

이다. 이때 원 (12.1.4)는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점(p.363) $(3, 0)$과 $2:1$로 외분하는 점(p.364) $(7, 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

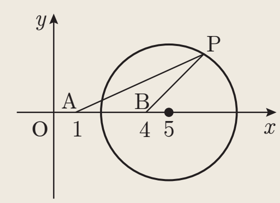


그림 12.4. $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$인 원

포인트 상 12.6

두 점으로부터 거리의 비가 일정한 원

두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\ (m, n>0)$인 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 이와 같은 원을 **아폴로니우스(Apollonios)의 원**이라 한다.

수직이등분선

두 점 A, B에서 거리가 같은 점의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이다.

보기 12.5 좌표평면의 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$으로부터의 거리의 비가 $1:2$인 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

보기 정답

12.4 (1) $(x-3)^2+(y-4)^2=16$

(2) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

12.5 $x^2+y^2=4$

예제 01 다음 조건을 만족하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 점 A$(7, 3)$, B$(-1, -3)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원

(2) 세 점 $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(4, -2)$를 지나는 원

길잡이 원의 방정식은 대부분 표준형

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

을 이용하여 구하지만, 세 점을 지나는 원의 방정식은 일반형

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

을 이용하여 구하는 것이 간편한다.

풀 이

- 세 점을 지나는 원의 방정식(p.414)
- 원의 방정식의 표준형(p.412)
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)
- 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이(p.250)

(1) 원의 중심은 두 점 A, B의 중점이므로

$$\left(\frac{7-1}{2}, \frac{3-3}{2}\right) \Rightarrow (3, 0)$$

에서 원의 중심의 좌표는 $(3, 0)$이다. 또한 원의 반지름의 길이는 원의 중심에서 점 A 혹은 점 B까지의 길이이므로 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하면

$$\sqrt{(7-3)^2+(3-0)^2}=5$$

이다. 따라서 중심의 좌표가 $(3, 0)$이고 반지름의 길이가 5인 원이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=25$$

(2) 구하는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

이라 하자. 주어진 세 점 $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(4, -2)$가 이 원 위의 점이므로 차례로 대입하면

$$C=0 \quad \cdots ㉠$$
$$A-B+C=-2 \quad \cdots ㉡$$
$$4A-2B+C=-20 \quad \cdots ㉢$$

이다. ㉠을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$$A-B=-2, \quad 4A-2B=-20$$

이고, 두 식을 연립하여 풀면 $A=-8$, $B=-6$이다. 따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-8x-6y=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=25$$

정답 (1) $(x-3)^2+y^2=25$ (2) $(x-4)^2+(y-3)^2=25$

돌다리 두드리기

두 점 $(-2, -3)$, $(4, 1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

원의 중심은 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$에서 $(1, -1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{(-2-1)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{13}$이다. 따라서 구하려는 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+1)^2=13$이다.

돌다리 두드리기

|답| $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

정답 및 풀이 p.569

개념 그대로

유제 01-1

세 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$, $(3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외접원의 넓이를 구하시오.

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하고 주어진 세 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$, $(3,\ 5)$가 이 원 위의 점이므로 차례대로 대입하면

$$\begin{cases} A+B+C=-2 & \cdots \text{㉠} \\ -A+B+C=-2 & \cdots \text{㉡} \\ 3A+5B+C=-34 & \cdots \text{㉢} \end{cases}$$

이다. ㉠$-$㉡을 하면 $A=0$이고, ㉠$-$㉢을 하면 $B=-\dfrac{A+16}{2}$에서 $A=0$이므로 $B=-8$이다. ㉠에 $A=0,\ B=-8$을 대입하면 $C=6$이다. 따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-8y+6=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-4)^2=10$$

이고, 외접원의 반지름은 $\sqrt{10}$이므로 원의 넓이는 10π이다.

답 10π

개념 더하기

유제 01-2

+ 이차부등식의 해(p.299)

방정식 $x^2+y^2+2kx+2ky+4k^2-8=0$이 반지름의 길이가 2보다 큰 원을 나타내도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

주어진 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x+k)^2+(y+k)^2=-2k^2+8$$

이다. 이 방정식이 반지름의 길이가 2보다 큰 원을 나타내려면 $-2k^2+8$이 $2^2=4$보다 커야 하므로

$$-2k^2+8>4 \quad \Rightarrow \quad k^2-2<0$$

이다. 따라서 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$이다.

답 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

개념 더하기

유제 01-3

+ 이차부등식의 해(p.299)

점 $(-3,\ -1)$을 지나고 원 $x^2+y^2-6x-4y+10=0$의 넓이를 이등분하는 직선의 y절편을 구하시오.

원 $x^2+y^2-6x-4y+10=0$을 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y-2)^2=3$$

이다. 이 원의 넓이를 이등분하는 직선은 중심을 지나야 한다. 즉, 구하는 직선은 원의 중심 $(3,\ 2)$와 점 $(-3,\ -1)$을 지나므로

$$y-2=\frac{-1-2}{-3-3}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

이다. 따라서 이 직선의 y절편은 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 $\dfrac{1}{2}$

여러 가지 원의 방정식

예제 02 다음 조건을 만족하는 도형의 방정식을 표준형으로 구하시오.

(1) 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$를 지나는 원

(2) 중심의 좌표가 $(2, 5)$이고 x축에 접하는 원

(3) 두 점 $(-1, 0)$, $(5, 0)$으로부터 거리의 비가 $2:1$인 점 P가 그리는 도형

길잡이 좌표축에 접하는 원의 방정식은 중심의 좌표와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하자.

- x축에 접하는 원: **반지름의 길이 $=|$중심의 y좌표$|$**
- y축에 접하는 원: **반지름의 길이 $=|$중심의 x좌표$|$**
- x축과 y축에 동시에 접하는 원: **반지름의 길이 $=|$중심의 x좌표$|=|$중심의 y좌표$|$**

풀 이

(1) 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+1)$라 둘 수 있다. 따라서 중심의 좌표를 $(a, a+1)$, 반지름의 길이를 r라 두면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2 \quad \cdots ㉠$$

이다. 방정식 ㉠이 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$를 지나므로 각각 대입하면

$$(1-a)^2+(5-a)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad 2a^2-12a+26=r^2 \quad \cdots ㉡$$

$$(-3-a)^2+(1-a)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad 2a^2+4a+10=r^2 \quad \cdots ㉢$$

이다. 식 ㉡, ㉢을 연립하면 $a=1$이고 $r^2=16$이다. ㉠에 대입하면

$$(x-1)^2+(y-2)^2=16$$

(2) 원의 중심의 좌표가 $(2, 5)$이고 x축에 접하는 원은 원의 중심에서 x축까지의 거리가 반지름의 길이이다. 즉, 반지름의 길이가 5이므로 구하는 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-2)^2+(y-5)^2=25$$

(3) $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(5, 0)$, $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

이다. 양변을 제곱하여 전개하여 정리하면

$$x^2+2x+1+y^2=4x^2-40x+100+4y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-14x+33=0$$

이고 표준형으로 변형하면 다음과 같다.

$$(x-7)^2+y^2=16$$

[다른 풀이]
선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 $(3, 0)$과 외분하는 점 $(11, 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 즉, 중심이 $(7, 0)$이고, 반지름의 길이가 4인 원이다.

정답 (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ (2) $(x-2)^2+(y-5)^2=25$ (3) $(x-7)^2+y^2=16$

- 두 점으로부터 거리의 비가 일정한 원(p.415)
- 좌표축에 접하는 원의 방정식(p.415)
- 원의 방정식의 표준형(p.412)
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

돌다리 두드리기

두 점 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(9, 0)$으로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $(x-11)^2+y^2=16$

점 P가 그리는 도형은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 이 두 점을 M, N이라 하고 각각 좌표를 구하면

$$\mathrm{M}\left(\frac{2\cdot9+1\cdot3}{3}, 0\right), \mathrm{N}\left(\frac{2\cdot9-1\cdot3}{1}, 0\right) \Rightarrow \mathrm{M}(7, 0), \mathrm{N}(15, 0)$$

이다. 따라서 원의 중심의 좌표는 $(11, 0)$이다. 또한 선분 MN의 길이가 지름이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{(15-7)^2}=8$에서 반지름의 길이는 4이다. 따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-11)^2+y^2=16$이다.

정답 및 풀이 p.569

개념 그대로

유제 02-1

세 점 O(0, 0), A(2, 0), B(4, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{OP}^2$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오.

점 $P(x,\ y)$라 놓으면

$$\overline{AP}^2=(2-x)^2+y^2$$
$$\overline{BP}^2=(4-x)^2+(3-y)^2$$
$$\overline{OP}^2=x^2+y^2$$

이다. 이것을 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{OP}^2$에 대입하여 정리하면

$$x^2-12x+y^2-6y+29=0$$
$$\Rightarrow\quad (x-6)^2+(y-3)^2=16$$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 (6, 3)이고 반지름의 길이가 4인 원이다. 따라서 넓이는 $4^2\pi=16\pi$이다.

답 16π

개념 그대로

유제 02-2

점 (1, 2)를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 두 원의 중심 사이의 거리를 구하시오.

x축, y축에 동시에 접하는 원이 제1사분면의 점 (1, 2)를 지나므로 원의 중심 역시 제1사분면에 있다. 그러므로 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$이라 하면 중심의 좌표가 $(r,\ r)$이고, 원의 방정식은

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

이다. 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로 대입하여 정리하면

$$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad (r-1)(r-5)=0$$

이므로 $r=1$ 또는 $r=5$이다. 따라서 구하고자 하는 두 원의 중심의 좌표는 각각

$$(1,\ 1),\quad (5,\ 5)$$

이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

개념 바꾸기

– 두 점으로부터 거리의 비가 일정한 원(p.415)
– 좌표축에 접하는 원의 방정식(p.415)
+ 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

유제 02-3

원 $x^2+y^2=20$ 위의 한 점과 점 A(12, 0)을 이은 선분의 중점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오.

원 $x^2+y^2=20$ 위의 한 점의 좌표를 $(a,\ b)$, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자. 점 $(a,\ b)$와 점 A의 중점 P에 대하여

$$x=\frac{a+12}{2},\quad y=\frac{b}{2}$$

이므로 $a=2x-12$, $b=2y$이다. 이때, 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=20$을 만족시킨다. 따라서

$$(2x-12)^2+(2y)^2=20 \quad\Rightarrow\quad x^2-12x+36+y^2=5$$

이고, 정리하면 $(x-6)^2+y^2=5$이다.

답 $(x-6)^2+y^2=5$

12-2 원과 직선의 위치 관계

원과 직선의 위치 관계

좌표평면 위의 원과 직선의 위치 관계는 교점의 개수에 따라 다음과 같이 세 가지로 구분된다.

- 교점의 개수가 0개: 만나지 않는다.
- 교점의 개수가 1개: 한 점에서 만난다. (접한다.)
- 교점의 개수가 2개: 서로 다른 두 점에서 만난다.

판별식을 이용한 원과 직선의 위치 관계

원점을 중심으로 하는 원과 직선의 방정식을 각각

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 & \cdots (12.2.1) \\ y=mx+n & \cdots (12.2.2) \end{cases}$$

이라 하자. 원과 직선의 교점의 좌표는 **연립이차방정식(p.254)**을 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$이다. (12.2.2)를 (12.2.1)에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad (m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \qquad \cdots (12.2.3)$$

이고 식 (12.2.3)은 x에 대한 이차방정식이다. 원 (12.2.1)과 직선 (12.2.2)의 교점의 개수는 이차방정식 (12.2.3)의 실근의 개수이므로, 이차방정식 (12.2.3)의 **판별식(p.166)**을 D라 하면 오른쪽 표와 같이 원과 직선의 위치관계를 알 수 있다.

원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용한 원과 직선의 위치 관계

중심이 $(x_1,\ y_1)$인 원과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d와 원의 반지름의 길이 r의 대소 관계에 따라 원과 직선의 위치 관계를 알 수 있다.

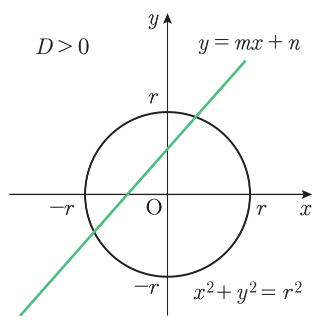
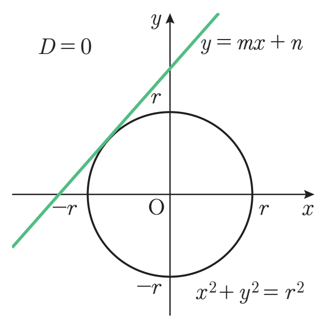
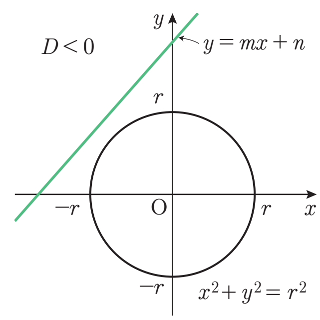
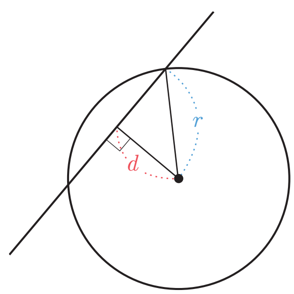
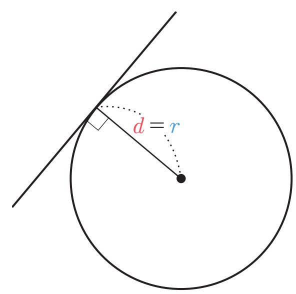
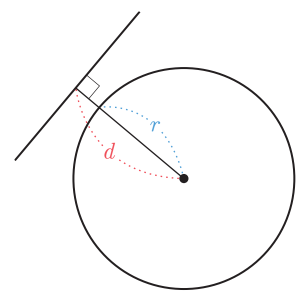
점과 직선 사이의 거리(p.401) 공식으로부터 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

포인트 상 12.7 **원과 직선의 위치 관계**

원과 직선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 D, 반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 직선까지의 거리를 d라 하면

- 서로 다른 두 점에서 만난다. $\iff$ $D>0$ $\iff$ $d<r$
- 한 점에서 만난다. (접한다.) $\iff$ $D=0$ $\iff$ $d=r$
- 만나지 않는다. $\iff$ $D<0$ $\iff$ $d>r$

원과 직선의 위치 관계를 판단할 때, 판별식을 이용하는 것보다 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이를 이용하는 것이 간편한 경우가 많다.

교점의 개수	서로 다른 두 점에서 만난다.	한 점에서 만난다. (접한다.)	만나지 않는다.
판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
원과 직선의 위치 관계			
d와 r	$d<r$	$d=r$	$d>r$
원과 직선의 위치 관계			

예 시

(1) 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+1$의 두 식에서 y를 소거하면

$$x^2+(x+1)^2=3 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-1=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\cdot(-1)=5>0$$

이므로 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+1$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원 $x^2+y^2=3$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+4$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{4}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

이다. 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{3}$보다 $d=2\sqrt{2}$가 더 크므로 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=x+4$는 만나지 않는다.

보기 12.6 다음 원과 직선의 위치 관계를 판단하시오.

(1) $x^2+y^2=2,\ y=x+1$ (2) $x^2+(y-2)^2=2,\ x+y-4=0$

보기 정답

12.6 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다. (접한다)

두 원의 위치 관계

좌표평면 위의 중심이 서로 다른 두 원의 위치 관계는 교점의 개수에 따라 다음과 같이 구분된다.

- 교점의 개수가 0개: 두 원은 만나지 않는다.
- 교점의 개수가 1개: 두 원은 한 점에서 만난다. (접한다.)
- 교점의 개수가 2개: 두 원은 서로 다른 두 점에서 만난다.

특히 두 원이 한 점에서 만날 때 두 원이 서로 접한다고 한다. 두 원이 서로 외부에서 접하는 경우 두 원이 외접한다고 하고, 한 원이 다른 한 원의 내부에서 접하는 경우 두 원이 내접한다고 한다. 이때 두 원이 만나는 점을 두 원의 접점이라 한다.

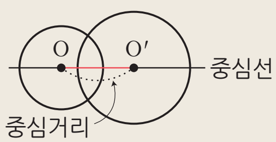


그림 12.5. 중심선과 중심거리

왼쪽 그림과 같이 두 원의 중심 O, O′을 지나는 직선을 중심선이라 하고, 선분 OO′의 길이를 두 원의 중심거리라 한다. 중심거리는 두 원의 위치 관계를 파악하는데 중요한 역할을 한다.

정 의 상 12.8 **중심거리**

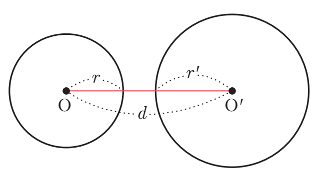
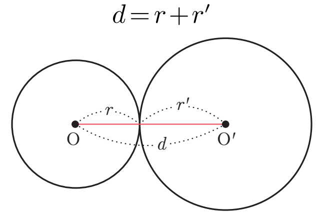
두 원의 중심 O, O′을 지나는 직선을 **중심선**이라 하고, 선분 OO′의 길이를 두 원의 **중심거리**라 한다.

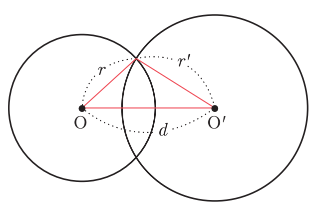
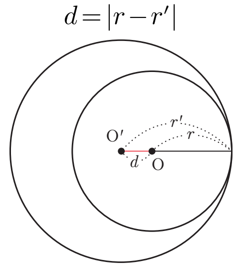
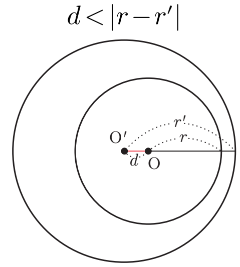
예 시

좌표평면 위에 중심이 (0, 0), (1, 2)인 두 원의 중심거리 d는

$$d=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

이다.

한 원이 다른 원의 외부에 있다.	외접한다.
$d>r+r'$	$d=r+r'$
	

서로 다른 두 점에서 만난다.	내접한다.	한 원이 다른 원의 내부에 있다.
$\lvert r-r'\rvert<d<r+r'$	$d=\lvert r-r'\rvert$	$d<\lvert r-r'\rvert$
		

원과 직선의 위치 관계(p.420)를 원의 중심과 직선 사이의 거리 d와 원의 반지름의 길이 r의 대소 관계로 나타낸 것과 마찬가지로 두 원의 위치 관계를 두 원의 반지름의 길이 r, r'과 두 원의 중심거리 d의 관계로 나타낼 수 있다.

포인트 상 12.9

두 원의 위치 관계

중심이 O, O′인 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하고, 두 원의 중심거리를 d라 하면 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

- 한 원이 다른 원의 외부에 있다. $\Longleftrightarrow$ $r+r' < d$
- 두 원이 외접한다. $\Longleftrightarrow$ $r+r' = d$
- 두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다. $\Longleftrightarrow$ $|r-r'| < d < r+r'$
- 두 원이 내접한다. $\Longleftrightarrow$ $|r-r'| = d$
- 한 원이 다른 원의 내부에 있다. $\Longleftrightarrow$ $|r-r'| > d$

예 시

반지름의 길이가 각각 $r=5$, $r'=2$인 두 원에 대하여 중심거리에 따른 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) 중심거리가 2이면 $2=d<|r-r'|=3$이므로 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

(2) 중심거리가 4이면 $|r-r'|=3<d=4<r+r'=7$이므로 두 원은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(3) 중심거리가 7이면 $d=r+r'=7$이므로 두 원은 외접한다.

보기 12.7 다음 두 원의 위치 관계를 판단하시오.

(1) $x^2+y^2=16$, $(x-4)^2+(y-4)^2=1$

(2) $x^2+y^2=16$, $(x-3)^2+(y-4)^2=1$

(3) $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-3)^2=1$

(4) $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2=1$

(5) $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

보기 정답

12.7 (1) 한 원이 다른 원의 외부에 있다.
(2) 두 원이 외접한다.
(3) 두 원이 서로 다른 두 점에서 만난다.
(4) 두 원이 내접한다.
(5) 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

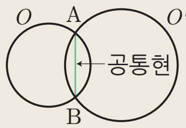


그림 12.6. 공통현

공통현의 방정식

왼쪽 그림과 같이 두 원 O, O'이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB를 두 원 O, O'의 공통현이라 한다.

정 의 상 12.10 **공통현**

두 원 O, O'이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB를 두 원 O, O'의 **공통현**이라 한다.

두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식(공통현의 방정식)을 구해보자. 두 원

$$O : x^2+y^2+Ax+By+C=0 \qquad \cdots (12.2.4)$$

$$O' : x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0 \qquad \cdots (12.2.5)$$

의 두 교점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$라 하면 (12.2.4) − (12.2.5)를 한 방정식

$$(A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0 \qquad \cdots (12.2.6)$$

도 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$가 만족시킨다. 이때 (12.2.6)은 x, y에 대한 일차방정식이므로 직선의 방정식(p.381)이고, 두 점을 지나는 직선(p.379)은 유일하므로 직선 (12.2.6)은 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식이다.

포인트 상 12.11 **공통현의 방정식**

두 원 $O : x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $O' : x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C-(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

$$\Rightarrow \quad (A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0$$

이다. 이 직선의 방정식을 공통현의 방정식이라고도 한다.

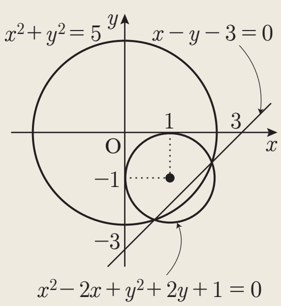


그림 12.7. 공통현의 방정식

예 시

두 원 $x^2+y^2=5$와 $x^2-2x+y^2+2y+1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x^2+y^2-5)-(x^2-2x+y^2+2y+1)=2x-2y-6=0$$

에서 $y=x-3$이다.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식(p.393)을 구하는 방법과 마찬가지로 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 구해보자. k가 실수일 때, 방정식

$$x^2+y^2-5+k(x^2-2x+y^2+2y+1)=0 \qquad \cdots (12.2.7)$$

을 생각하자. (12.2.7)의 좌변을 전개하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2-2kx+2ky+(k-5)=0$$

이고, k의 값에 따라 방정식이 나타내는 도형은 다음과 같다.

(i) $k=-1$인 경우, x, y에 대한 일차식이므로 직선의 방정식이다.
(ii) $k\neq-1$인 경우, 양변을 $k+1$로 나누면 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 꼴로 나타낼 수 있으므로 원의 방정식이다.

방정식 (12.2.7)이 k의 값에 관계없이 성립하려면 항등식의 성질 I(p.49)에 의하여

$$x^2+y^2-5=0, \qquad x^2+y^2-2x+2y+1=0$$

이어야 한다. 즉, (12.2.7)은 두 원의 교점 $(1,\ -2)$, $(2,\ -1)$을 지나는 도형의 방정식이고, 특히 $k\neq-1$이면 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식이다.

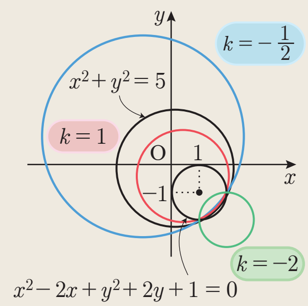


그림 12.8. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 k의 값에 따라 변한다.

포인트 상 12.12 **두 원의 교점을 지나는 원의 방정식**

두 원 $O: x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $O': x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, x, y에 대한 방정식

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

이 나타내는 도형은 실수 k의 값에 상관없이 두 원 O, O'의 교점을 지난다. 이때,

- $k=-1$이면 두 원의 교점을 지나는 직선이다.
- $k\neq-1$이면 두 원의 교점을 지나는 원이다.

예시 두 원 $O: x^2+y^2-6x=1$, $O': x^2+y^2=1$의 교점을 지나는 도형의 방정식은

$$x^2+y^2-6x-1+k(x^2+y^2-1)=0 \qquad \cdots (12.2.8)$$

이다. 따라서 두 원 O, O'의 교점과 점 $(-2,\ 0)$을 지나는 원의 방정식은 (12.2.8)에 $x=-2$, $y=0$을 대입하면 $k=-5$이므로 $x^2-6x+y^2-1-5(x^2+y^2-1)=0$에서 $2x^2+2y^2+3x-2=0$이다.

보기 12.8 두 원 $x^2+y^2+2x+4y-20=0$, $x^2+y^2-6x-12y+20=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

보기 12.9 두 원 $x^2+y^2+2x+4y-20=0$, $x^2+y^2-6x-12y+20=0$의 교점과 점 $(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

보기 정답

12.8 $x+2y-5=0$

12.9 $x^2+y^2-3x-6y+5=0$

원과 직선의 위치 관계

예제 03

원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=2x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

| 길잡이 | 원과 직선의 위치 관계는 다음 두 가지 방법으로 판별할 수 있다.

- **원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식**
- **원의 중심과 직선 사이의 거리**

| 풀 이 |

공통 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하면

$$x^2+(2x+k)^2=8 \quad \Rightarrow \quad 5x^2+4kx+k^2-8=0$$

이고, 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-8)=-k^2+40 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 판별식 D를 이용하여 위치 관계를 판별할 수 있다.

[다른 풀이]

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리 $d=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$와 원의 반지름의 길이 $r=2\sqrt{2}$의 관계를 이용하여 위치 관계를 판별할 수 있다.

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때에는 판별식 $D>0$이다. 즉, ㉠>0에서

$$-k^2+40>0 \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$$

[다른 풀이]

$d<r$이므로 $|k|<2\sqrt{10}$이다. 즉, $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$이다.

(2) 원과 직선이 한 점에서 만날 때에는 판별식 $D=0$이다. 즉, ㉠$=0$에서

$$-k^2+40=0 \quad \Rightarrow \quad k=\pm 2\sqrt{10}$$

[다른 풀이]

$d=r$이므로 $|k|=2\sqrt{10}$이다. 즉, $k=\pm 2\sqrt{10}$이다.

(3) 원과 직선이 만나지 않을 때에는 판별식 $D<0$이다. 즉, ㉠<0에서

$$-k^2+40<0 \quad \Rightarrow \quad k<-2\sqrt{10} \text{ 또는 } k>2\sqrt{10}$$

[다른 풀이]

$d>r$이므로 $|k|>2\sqrt{10}$이다. 즉, $k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$이다.

| 정답 | (1) $-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}$ (2) $k=\pm 2\sqrt{10}$ (3) $k<-2\sqrt{10}$ 또는 $k>2\sqrt{10}$

- 원과 직선의 위치 관계(p.420)
- 점과 직선 사이의 거리(p.401)
- 이차부등식의 해(p.299)
- 이차방정식의 판별식(p.166)

돌다리 두드리기

원 $x^2+y^2=4$가 직선 $y=x+k$와 두 점에서 만날 때, k의 값의 범위를 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하면

$$x^2+(x+k)^2=2x^2+2kx+k^2=4$$

에서 이 이차방정식의 판별식 $D>0$일 때, 원과 직선이 두 점에서 만난다. 즉,

$$\frac{D}{4}=k^2-2\cdot(k^2-4)=-k^2+8>0$$

이므로 $-2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$이다.

개념 줄이기

유제 03-1

– 이차부등식의 해(p.299)

직선 $y=x$에 접하는 원의 방정식이 $(x-3)^2+(y+1)^2=k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

원의 중심 $(3,\ -1)$과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이다. 원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 한다. 따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 $k=(2\sqrt{2})^2=8$이다.

답 8

개념 그대로

유제 03-2

직선 $y=x+k$와 원 $x^2+y^2=18$이 만나지 않도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

직선 $y=x+k$를 $x^2+y^2=18$에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=18 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+2kx+k^2-18=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않기 위해 $D<0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-18)<0 \quad \Rightarrow \quad k^2>36$$

에서 $k<-6$ 또는 $k>6$이다. 따라서 범위를 만족하는 자연수 k의 최솟값은 7이다.

[다른 풀이]

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이고, 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2} \Rightarrow |k|>6$$

이다. 따라서 $k<-6$ 또는 $k>6$이고, 범위를 만족하는 자연수 k의 최솟값은 7이다.

답 7

개념 바꾸기

유제 03-3

– 이차부등식의 해(p.299)
– 이차방정식의 판별식(p.166)
+ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

원 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$가 직선 $y=-2x+3$과 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$(x-3)^2+(-2x+3+1)^2=4 \Rightarrow (5x-7)(x-3)=0$$

에서 $x=\frac{7}{5}$ 또는 $x=3$이다. 직선 $y=-2x+3$에 대입하여 두 점 A, B를 구하면

$$\mathrm{A}\left(\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right),\ \mathrm{B}(3,\ -3) \quad \text{또는} \quad \mathrm{A}(3,\ -3),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right)$$

이다. 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{\left(3-\frac{7}{5}\right)^2+\left(-3-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

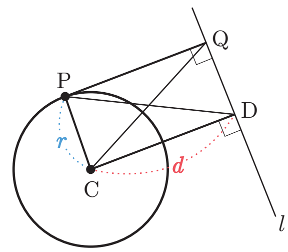
예제 04 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$ 위의 한 점과 직선 $3x+4y-10=0$ 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

길잡이

중심이 C인 원과 직선 l이 만나지 않을 때, 원 위의 한 점을 P라 하자. 두 점 C, P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, Q라 하면

$$\overline{CP}+\overline{PQ}\geq\overline{CQ}\geq\overline{CD} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ}\geq\overline{CD}-\overline{CP}$$

$$\overline{CP}+\overline{CD}\geq\overline{PD}\geq\overline{PQ} \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ}\leq\overline{CD}+\overline{CP}$$



이 성립한다. 그림에서 $\overline{CD}=d$, $\overline{CP}=r$이므로

$$d-r\leq\overline{PQ}\leq d+r$$

이다. 따라서 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

- **거리의 최댓값 = (원의 중심과 직선 사이의 거리) + (원의 반지름의 길이)**
- **거리의 최솟값 = (원의 중심과 직선 사이의 거리) − (원의 반지름의 길이)**

풀이

1단계 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구한다.

원의 중심이 $(-2,\ -1)$과 직선 $3x+4y-10=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+4\cdot(-1)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{20}{5}=4$$

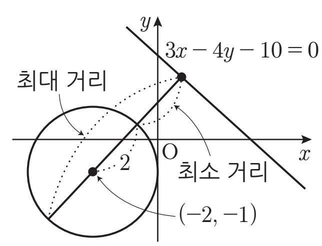
2단계 원의 성질을 이용하여 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

이때, 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$d+2=4+2=6$$

원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은

$$d-2=4-2=2$$



정답 최댓값: 6, 최솟값: 2

1 • 점과 직선 사이의 거리(p.401)

2 • 원과 직선의 위치 관계(p.420)

돌다리 두드리기

원 $x^2+y^2=4$ 위의 한 점과 직선 $y=x+4$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $2\sqrt{2}-2$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

이므로 원 위의 한 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt{2}-2$이다.

정답 및 풀이 p.570

개념 그대로

유제 04-1

원 $(x-4)^2+(y+1)^2=r^2$ 위의 한 점과 직선 $5x-12y-6=0$ 사이의 거리의 최댓값이 7일 때, 양수 r의 값을 구하시오.

원의 중심이 $(4,\ -1)$과 직선 $5x-12y-6=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|4\cdot 5+(-1)\cdot(-12)-6|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=2$$

이므로 최댓값은 $2+r$이다. 즉, $2+r=7$이므로 $r=5$이다.

답 5

개념 바꾸기

유제 04-2

− 점과 직선 사이의 거리(p.401)
+ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

점 $(1,\ -3)$에서 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

점 $(1,\ -3)$과 원의 중심 $(3,\ 1)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-3)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$$

에서 $2\sqrt{5}$이다. 원의 반지름의 길이는 2이고, $2\sqrt{5}>2$이므로 주어진 점 $(1,\ -3)$은 원 밖에 있다. 따라서 주어진 점과 원에 이르는 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}+2$이고, 최솟값은 $2\sqrt{5}-2$이다.

답 최댓값: $2\sqrt{5}+2$, 최솟값: $2\sqrt{5}-2$

개념 그대로

유제 04-3

원 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $2x-y=6$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하시오.

원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$x^2+y^2+2x-4y=(x+1)^2+(y-2)^2-5=0$$

이므로, 중심이 $(-1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다. 이 원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 직선 $2x-y-6=0$ 까지의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$

이다. 선분 PQ의 길이가 최소가 되려면 d에서 반지름의 길이를 뺀 값이므로

$$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

에서 $\sqrt{5}$이다.

답 $\sqrt{5}$

두 원의 위치 관계

예제 05

두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x-3)^2+(y-4)^2=4$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 양수 r의 값 또는 r의 값의 범위를 구하시오.

(1) 두 점에서 만난다. (2) 한 점에서 만난다.

길잡이 중심이 서로 다른 두 원의 중심 사이의 거리를 d, 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하면 두 원의 교점의 개수는 다음과 같다.

- 만나지 않는다. $\iff$ (i) 한 원이 다른 원의 내부에 있을 때: $d<|r-r'|$
  (ii) 한 원이 다른 원의 외부에 있을 때: $d>r+r'$
- 한 점에서 만난다. $\iff$ (i) 내접할 때: $d=|r-r'|$
  (ii) 외접할 때: $d=r+r'$
- 두 점에서 만난다. $\iff$ $|r-r'|<d<r+r'$

풀 이

공통 두 원의 중심은 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ 4)$이므로 중심 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 2이다.

(1) 두 원이 두 점에서 만나는 경우에는 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이를 합한 것보다 작고 차보다 커야 한다. 따라서

$$|r-2|<d<r+2 \quad \Rightarrow \quad |r-2|<5,\ 5<r+2$$

이다. 위 두 부등식을 풀면

$$-3<r<7, \quad r>3$$

이므로 $3<r<7$이다.

(2) 두 원이 한 점에서 만나려면 두 원이 외접하거나 내접해야 한다. 이때 두 원이 외접하려면 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 합과 같고 내접하려면 중심 사이의 거리가 반지름의 길이의 차와 같아야 한다. 따라서

$$5=r+2 \quad \text{또는} \quad 5=|r-2|$$

이므로 $r=3$ 또는 $r=7$이다.

정답 (1) $3<r<7$ (2) $r=3$ 또는 $r=7$

- 두 원의 위치 관계(p.423)
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)
- 절댓값 기호를 1개 포함한 부등식의 풀이(p.284)
- 연립일차부등식의 풀이(p.283)

돌다리 두드리기

두 원 $x^2+y^2=r^2$, $(x-3)^2+(y-4)^2=4$가 서로 만나지 않을 때, 양수 r의 값의 범위를 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $0<r<3$ 또는 $r>7$

두 원의 중심은 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ 4)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

이고, 반지름의 길이는 각각 r, 2이다. 서로 만나지 않으려면 $d>r+2$ 또는 $d<|r-2|$여야 하고, $r>0$이므로 $0<r<3$ 또는 $r>7$이다.

정답 및 풀이 p.570

개념 그대로

유제 05-1

원 $(x-3)^2+(y-5)^2=r^2$이 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=36$의 내부에 있을 때, 이를 만족시키는 자연수 r의 최댓값을 구하시오.

한 원이 다른 원의 내부에 있으려면 두 중심 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 차보다 작아야 한다. 두 원의 중심은 각각 $(3, 5)$, $(4, 2)$이므로 중심 사이의 거리 d는

$$d=\sqrt{(3-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 r, 6이다. 따라서

$$\sqrt{10}<|6-r|$$

이다. 이때, 큰 원의 반지름의 길이가 6이므로 $r<6$임을 알 수 있다. 그러므로

$$\sqrt{10}<6-r \quad \Rightarrow \quad r<6-\sqrt{10}$$

이다. $3<\sqrt{10}<4$이므로 $r<2.\mathrm{xxx}$에서 자연수 r의 최댓값은 2이다.

답 2

개념 그대로

유제 05-2

두 원 $x^2+y^2=8$, $(x-a)^2+(y-a)^2=2$가 만날 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

두 원의 중심은 각각 $(0, 0)$, (a, a)이므로 중심 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,|a|$$

이다. 두 원의 반지름의 길이는 각각 $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$이고 두 원이 만날 때는 두 원이 서로 접할 때 또는 두 점에서 만날 때를 생각하면 된다. 즉

$$2\sqrt{2}-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\,|a|\le 2\sqrt{2}+\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 1\le|a|\le 3$$

을 만족해야 한다.

(i) $1\le|a|$일 때, $a\le-1$, $a\ge 1$
(ii) $|a|\le 3$일 때, $-3\le a\le 3$

이므로 공통부분은 $-3\le a\le-1$ 또는 $1\le a\le 3$이다.

답 $-3\le a\le-1$ 또는 $1\le a\le 3$

개념 더하기

유제 05-3

+ 원과 직선의 위치 관계(p.420)

원 $x^2+y^2=1$에 외접하고 직선 $3x+4y-19=0$에 접하는 원 중에서 그 중심이 x축 위에 있는 도형의 방정식을 구하시오.

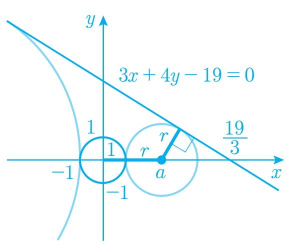
중심이 x축 위에 있으므로 구하려는 원의 중심을 $(a, 0)$이라 놓고, 반지름의 길이를 r라 하면

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \qquad \cdots ㉠$$

방정식 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$에 외접하므로

$$|a|=1+r \qquad \cdots ㉡$$

을 만족해야 한다. 또한, ㉠이 직선 $3x+4y-19=0$에 접하므로



$$\frac{|3a-19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r \quad \Rightarrow \quad |3a-19|=5r$$

를 만족해야 한다. 그런데 $3a\ge 19$, 즉 $a\ge\frac{19}{3}$이면 그림에서 직선 $3x+4y-19=0$과 원 $x^2+y^2=1$에 동시에 외접할 수 없으므로 $a<\frac{19}{3}$이다. 따라서

$$-3a+19=5r \qquad \cdots ㉢$$

이어야 한다. ㉡, ㉢을 연립하면 $a\ge 0$일 때, $a=3$, $r=2$이고 $a<0$일 때, $a=-12$, $r=11$이므로 구하려는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=4 \text{ 또는 } (x+12)^2+y^2=121$$

답 $(x-3)^2+y^2=4$ 또는 $(x+12)^2+y^2=121$

예제 06

두 원 $x^2+y^2=25$, $x^2+y^2+8x-6y+5=0$의 공통현의 길이를 구하시오.

길잡이 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \quad x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$$

에 대하여, 교점을 잇는 선분을 공통현이라 한다. 이 공통현의 방정식은

$$(x^2+y^2+Ax+By+C)-(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

이다. 또한 **두 원의 중심을 지나는 직선은 공통현을 수직이등분한다.**

풀 이

1 • 공통현의 방정식(p.424)

1단계 두 원의 공통현의 방정식을 구한다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2+y^2-25)-(x^2+y^2+8x-6y+5)=0$$
$$\Rightarrow \quad -8x+6y-30=0$$

에서 $4x-3y+15=0$이다.

2 • 점과 직선 사이의 거리(p.401)

2단계 두 원의 중심을 지나는 직선이 공통현을 수직이등분함을 이용하여 현의 길이를 구한다.

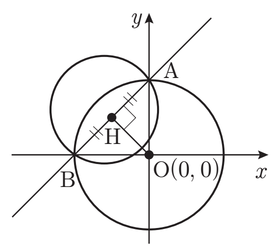
두 원의 교점을 A, B라 하고, 원 $x^2+y^2=25$의 중심을 O(0, 0)라 하자.
점 O에서 공통현에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 공통현의 중점이다.
그림에서 원 $x^2+y^2=25$의 중심 O와 점 H 사이의 거리를 구하면

$$\overline{OH}=\frac{|15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

이고, 피타고라스 정리에 의해 선분 AH의 길이는

$$\overline{AH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

이다. 따라서 공통현의 길이는 $2\times\overline{AH}=8$이다.



정답 8

돌다리 두드리기

두 원 $x^2+y^2-9=0$, $x^2+y^2-4x+4y+3=0$의 공통현의 길이를 구하시오.

공통현의 방정식은 $x-y-3=0$이다. 원 $x^2+y^2-9=0$의 중심 $(0,\ 0)$과 공통현 사이의 거리는 $\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이고 피타고라스 정리에 의하여 공통현의 길이는 $2\times\sqrt{3^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$이다.

돌다리 두드리기
|답| $3\sqrt{2}$

개념 바꾸기

유제 06-1

- 점과 직선 사이의 거리(p.401)
+ 두 점을 지나는 직선의 방정식(p.379)

두 원 $x^2+y^2+2y=0$, $x^2+y^2+6x-4y-3=0$의 공통현의 중점의 좌표를 구하시오.

두 원의 공통현의 방정식을 구하면

$$(x^2+y^2+2y)-(x^2+y^2+6x-4y-3)=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x-2y-1=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한, 두 원의 중심이 각각 $(0,\ -1)$, $(-3,\ 2)$이므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{2+1}{-3-0}x \quad \Rightarrow \quad y=-x-1 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이때 두 원의 중심을 지나는 직선이 공통현을 수직이등분하므로 직선 ㉡과 ㉠의 교점이 공통현의 중점이다. 따라서 ㉠와 ㉡을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{3}{4}$이므로 공통현의 중점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$이다.

답 $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

개념 바꾸기

유제 06-2

- 점과 직선 사이의 거리(p.401)
+ 두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)

두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+kx-4y=0$의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선이 직선 $y=x-5$와 수직일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

두 원의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2+kx-4y)=0$$
$$\Rightarrow \quad -kx+4y-4=0$$

에서 $kx-4y+4=0$이다. 이 직선이 $y=x-5$와 수직이므로 기울기가 -1이어야 한다. 즉, $y=\frac{k}{4}x+1$에서 $\frac{k}{4}=-1$이므로 $k=-4$이다.

답 -4

개념 그대로

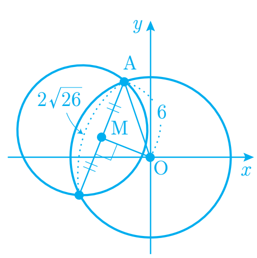
유제 06-3

두 원 $x^2+y^2=36$, $x^2+y^2+12x-4y+k=0$의 공통현의 길이가 $2\sqrt{26}$이 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2+y^2-36)-(x^2+y^2+12x-4y+k)=0$$
$$\Rightarrow \quad -12x+4y-36-k=0$$

이다. 공통현은 원 $x^2+y^2=36$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 원 $x^2+y^2+12x-4y+k=0$의 중심 O'을 잇는 선분을 수직이등분한다. 따라서 두 원의 교점 중 한 점을 A라 하고, 공통현의 중점을 M이라 하면 피타고라스 정리에 의해



$$\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2=\overline{\mathrm{OM}}^2 \qquad \cdots ㉠$$

이 성립한다. 선분 OA는 원 $x^2+y^2=36$의 반지름이므로 길이가 6이고 $\overline{\mathrm{AM}}$은 공통현의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로 $\sqrt{26}$이다. 또한, 선분 OM은 점 O에서 공통현 $-12x+4y-36-k=0$까지의 거리이므로

$$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{|-36-k|}{\sqrt{(-12)^2+4^2}}=\frac{|-36-k|}{4\sqrt{10}}$$

이다. 따라서 ㉠에 대입하면

$$6^2-(\sqrt{26})^2=(\sqrt{10})^2=\left(\frac{|-36-k|}{4\sqrt{10}}\right)^2$$

에서 $|-36-k|=\pm40$이다. 절댓값을 풀면 $k=-76$ 또는 $k=4$이고 문제의 조건에서 $k>0$이므로 $k=4$이다.

답 4

예제 07 두 원 $O: x^2+y^2-2x=0$, $O': x^2+y^2+4ax-4y+5=0$의 교점과 점 $(0, 1)$을 지나는 원의 넓이가 25π일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

길잡이 두 원 $O: x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $O': x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, x, y에 대한 방정식

$$(x^2+y^2+Ax+By+C)+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0$$

은 실수 k의 값에 상관없이 두 원 O, O'의 교점을 지난다. 이때 **$k=-1$이면 공통현의 방정식이고, $k\neq-1$이면 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식이다.**

풀이

1단계 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 구한다.

두 원 O, O'이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq-1$인 실수 k에 대하여

$$k(x^2+y^2-2x)+x^2+y^2+4ax-4y+5=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 원이 점 $(0, 1)$을 지나므로 ㉠에 대입하면 $k+2=0$에서 $k=-2$이다. 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-4(a+1)x+4y-5=0 \qquad \cdots ㉡$$

2단계 원의 방정식을 표준형으로 바꾸어 반지름의 길이를 구한다.

㉡의 표준형은 $(x-2a-2)^2+(y+2)^2=9+4(a+1)^2$이고, 넓이가 25π이므로

$$\{9+4(a+1)^2\}\pi=25\pi \quad \Rightarrow \quad (a+1)^2=4$$

3단계 a의 값에 따라 두 원의 위치 관계를 확인하여 교점이 있는 경우를 구한다.

$a+1=\pm2$이므로 $a=-3$ 또는 $a=1$이다. 원 O와 O'를 표준형으로 변형하면

$$O: (x-1)^2+y^2=1, \quad O': (x+2a)^2+(y-2)^2=4a^2-1$$

이므로 두 원 O와 O'의 반지름의 길이 r, r'과 중심거리 d는

$$r=1, \quad r'=\sqrt{4a^2-1}, \quad d=\sqrt{4a^2+4a+5}$$

이다. 이때 a의 값에 따라 두 원의 위치 관계를 살펴보면

(i) $a=-3$일 때, $r=1$, $r'=\sqrt{35}$, $d=\sqrt{29}$이므로 $|r-r'|<d<r+r'$이 성립한다. 즉, 두 원 O, O'은 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) $a=1$일 때, $r=1$, $r'=\sqrt{3}$, $d=\sqrt{13}$이므로 $d>r+r'$이 성립한다. 즉, 두 원 O, O'은 만나지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 문제의 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 -3이다.

정답 -3

1 • 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식(p.425)
2 • 원의 방정식의 표준형(p.412)
3 • 두 원의 위치 관계(p.423)
• 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

돌다리 두드리기

두 원 $x^2+y^2-1=0$, $x^2+y^2-4x+1=0$의 교점과 점 $(4, 3)$을 지나는 원의 방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $7x^2+7y^2-48x+17=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq-1$인 실수 k에 대하여

$$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2-4x+1)=0 \qquad \cdots ㉣$$

이다. 이 원이 점 $(4, 3)$을 지나므로 대입하면

$$16+9-1+k(16+9-16+1)=0$$

에서 $k=-\frac{12}{5}$이므로 ㉣에 대입하면 $7x^2+7y^2-48x+17=0$이다.

정답 및 풀이 p.572

개념 줄이기

유제 07-1

- 두 원의 위치 관계(p.423)
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

두 원 $x^2+y^2+4x-4=0$, $x^2+y^2+x-6y+2=0$의 교점과 점 $(-2, 4)$를 지나는 원의 둘레의 길이를 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은 $k\neq-1$인 실수 k에 대하여

$$x^2+y^2+4x-4+k(x^2+y^2+x-6y+2)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 원이 점 $(-2, 4)$를 지나므로 대입하면

$$4+16-8-4+k(4+16-2-24+2)=8-4k=0$$

에서 $k=2$이다. $k=2$를 다시 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2+4x-4+2(x^2+y^2+x-6y+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+2x-4y=0$$

이다. 이 원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5$$

이므로 반지름은 $\sqrt{5}$이고 원의 둘레의 길이는 $2\sqrt{5}\pi$이다.

답 $2\sqrt{5}\pi$

개념 바꾸기

유제 07-2

- 두 원의 위치 관계(p.423)
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)
- \+ 원과 직선의 위치 관계(p.420)
- \+ 이차방정식의 판별식(p.166)

두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x-4y+4=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+y=4$에 접하는 원의 방정식을 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 구하면 $k\neq-1$인 실수 k에 대하여

$$x^2+y^2-4+k(x^2+y^2-4x-4y+4)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 원이 직선 $x+y=4$에 접하므로, $y=4-x$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$(k+1)x^2-4(k+1)x+2k+6=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉡의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4(k+1)^2-(k+1)(2k+6)=2(k+1)(k-1)=0$$

에서 $k=1$ 또는 $k=-1$인데, $k\neq-1$이므로 $k=1$이다. 따라서 구하려는 원의 방정식은 ㉠에 $k=1$을 대입하면

$$x^2+y^2-2x-2y=0$$

답 $x^2+y^2-2x-2y=0$

개념 바꾸기

유제 07-3

- 두 원의 위치 관계(p.423)
- 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)
- \+ 공통현의 방정식(p.424)

두 원 $x^2+y^2-3=0$, $x^2+y^2-4x+1=0$의 교점을 지나고, 점 $(2, 1)$을 지나는 원과 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$의 공통현의 방정식을 구하시오.

두 원 $x^2+y^2-3=0$, $x^2+y^2-4x+1=0$의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-3+k(x^2+y^2-4x+1)=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. (단, $k\neq-1$) 이 원이 점 $(2, 1)$을 지나므로 대입하면

$$4+1-3+k(4+1-8+1)=2-2k=0$$

에서 $k=1$이다. $k=1$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-3+x^2+y^2-4x+1=2x^2+2y^2-4x-2=0$$

에서 $x^2+y^2-2x-1=0$이다. 이 원과 원 $x^2+y^2-2x+2y=0$의 공통현의 방정식을 구하면

$$(x^2+y^2-2x-1)-(x^2+y^2-2x+2y)=-2y-1=0$$

에서 $y=-\frac{1}{2}$이다.

답 $y=-\frac{1}{2}$

12-3 원의 접선의 방정식

원의 접선의 성질
- 원의 중심과 접점을 이은 반지름은 접선과 수직이다.
- 원의 중심과 접선 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.

원과 직선의 위치 관계(p.420) 중 원과 직선이 한 점에서 만나면 접한다고 하고, 원에 접하는 직선을 접선이라 한다. 원의 접선은 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- 기울기가 주어졌을 때의 원의 접선
- 원 위의 점에서의 접선
- 원 밖의 점에서의 접선

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 놓고 n을 m에 대한 식으로 나타내면 된다.

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구해보자.

이차방정식의 판별식을 이용하는 방법

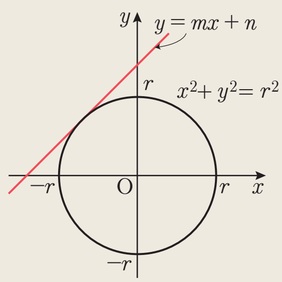


그림 12.9. 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선

접선의 방정식 $y=mx+n$을 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad (m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \qquad \cdots(12.3.1)$$

이다. 이차방정식 (12.3.1)의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(mn)^2-(m^2+1)(n^2-r^2)=r^2(m^2+1)-n^2$$

이고, 원과 직선의 위치 관계(p.420)에 의하여 직선과 원이 접할 때 판별식 $D=0$이므로

$$n^2=r^2(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad n=\pm r\sqrt{m^2+1}$$

이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

원의 중심과 접선 사이의 거리를 이용하는 방법

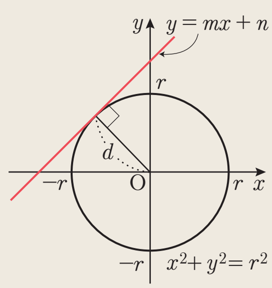


그림 12.10. 원의 중심과 접선 사이의 거리가 r이고 기울기가 m인 직선

접선의 방정식 $y=mx+n$을 일반형으로 바꾸면 $mx-y+n=0$이다. 원과 직선의 위치 관계(p.420)에 의하여 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r이므로

$$r=\frac{|0-0+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \Rightarrow \quad n=\pm r\sqrt{m^2+1}$$

이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

포인트 상 12.13 **기울기가 주어진 원의 접선의 방정식**

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

> 한 원에서 기울기가 같은 접선은 2개 존재한다.

예 시 | 원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=2x\pm 1\cdot\sqrt{2^2+1}=2x\pm\sqrt{5}$$

보기 12.10 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하시오.

원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해보자.

- $x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$인 경우, 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이고 점 P에서의 접선은 직선 OP와 수직이므로 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)\quad\Rightarrow\quad x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2 \qquad\cdots(12.3.2)$$

이다. 이때 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 ${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$이고 이를 (12.3.2)에 대입하면 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad\cdots(12.3.3)$$

- $x_1=0$ 또는 $y_1=0$인 경우, 점 P는 좌표축 위에 있고 접선의 방정식은

$$y=\pm r \text{ 또는 } x=\pm r$$

이다. 이 경우에도 (12.3.3)이 성립한다.

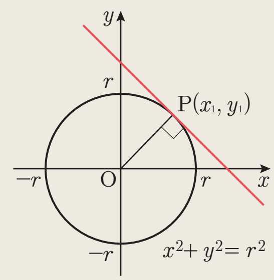


그림 12.11. $x_1\neq 0,\ y_1\neq 0$인 경우

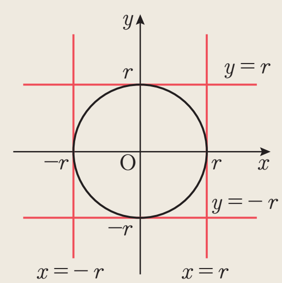


그림 12.12. $x_1=0$ 또는 $y_1=0$인 경우

포인트 상 12.14 **원 위의 점에서의 접선의 방정식**

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

예 시 | 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$에서 $x+\sqrt{3}y=2$이다. 또한 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은 $x=1$이다.

보기 12.11 원 $x^2+y^2=4$ 위의 다음 점들에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(1,\ \sqrt{3})$ (2) 점 $(2,\ 0)$ (3) 점 $(0,\ 2)$

보기 정답

12.10 $y=x\pm 2\sqrt{2}$

12.11 (1) $x+\sqrt{3}y=4$ (2) $x=2$ (3) $y=2$

원 밖의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서 그은 접선의 방정식은 일반적으로 다음의 두 가지 방법으로 접선을 구한다.

- 접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 점 P에서의 접선이 점 A를 지난다.
- 점 A를 지나고 기울기가 m인 직선이 원과 접한다.

포인트 상 12.15 **접점을 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식**

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 (a, b)에서 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

단계 1. 원 위의 접점을 (x_1, y_1)이라 두면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다.

단계 2. 접선의 방정식이 점 (a, b)를 지나므로 $ax_1+by_1=r^2$이다.

단계 3. 점 (x_1, y_1)은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 ${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$이다.

단계 4. 단계 2, 단계 3에서 나온 식을 연립하여 x_1, y_1의 값을 구한 뒤 단계 1의 식에 대입한다.

원 밖의 점에서의 접선은 2개 존재한다.

예 시

원 $x^2+y^2=2$ 밖의 한 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 방정식을 구해보자. 원과 직선의 접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=2 \qquad \cdots (12.3.4)$$

이다. 이 직선은 점 $(2, 0)$을 지나므로 (12.3.4)에 대입하면

$$2x_1=2 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \qquad \cdots (12.3.5)$$

이다. 한편, 점 P는 원 위의 점이므로

$${x_1}^2+{y_1}^2=2 \qquad \cdots (12.3.6)$$

이다. 두 식 (12.3.5), (12.3.6)을 연립하면

$$1+{y_1}^2=2 \quad \Rightarrow \quad {y_1}^2=1$$

이므로 $x_1=1,\ y_1=1$ 또는 $x_1=1,\ y_1=-1$을 얻는다. 즉, 접점의 좌표는 $(1, 1)$ 또는 $(1, -1)$이다. 이제 두 접점 $(1, 1)$, $(1, -1)$에서의 접선의 방정식을 구하면 각각 $x+y=2$ 또는 $x-y=2$이고 정리하면

$$y=-x+2 \text{ 또는 } y=x-2$$

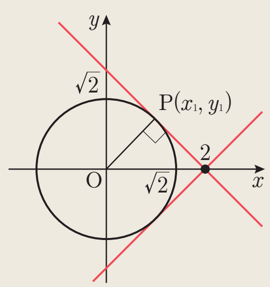


그림 12.13. 원 $x^2+y^2=2$ 밖의 점 $(2, 0)$에서 그은 접선

보기 12.12 점 $(3, 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

보기 정답

12.12 $y=2x-5$ 또는 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

포인트 상 12.16

기울기를 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 한 점 (a, b)에서 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

단계 1. 기울기가 m이고 점 (a, b)를 지나는 접선의 방정식은 $y-b=m(x-a)$이다.

단계 2. (원의 중심과 접선 사이의 거리) = (반지름의 길이)임을 이용하여 기울기 m의 값을 구한다.

단계 3. 단계 2에서 구한 기울기 m의 값을 단계 1의 식에 대입한다.

예 시

원 $x^2+y^2=2$ 밖의 한 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=m(x-2) \quad \Rightarrow \quad mx-y-2m=0 \qquad \cdots (12.3.7)$$

이다. 직선 (12.3.7)과 원 $x^2+y^2=2$의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad m^2=1$$

에서 $m=1$ 또는 $m=-1$이다. 이 값을 (12.3.7)에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=x-2 \text{ 또는 } y=-x+2$$

보기 12.13 점 $(1, 3)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

한 걸음 더

원 밖의 점에서의 접선 중 y축과 평행한 직선

원 밖의 점에서의 접선은 항상 두 개이지만 **기울기를 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식**(p.439)을 구할 때, 기울기의 값이 하나만 나오는 경우가 있다. 이때에는 $x=k$ (k는 상수)꼴의 직선이 접선인지 확인해야 한다.

원 $x^2+y^2=4$ 밖의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 방정식을 구해보자. 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y=m(x-2)+2 \quad \Rightarrow \quad mx-y-2m+2=0$$

이다. 이 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \Rightarrow \quad (m-1)^2=m^2+1$$

에서 $m=0$이다. 즉, 접선의 방정식은 $y=2$이다. 하지만 원 밖의 점에서의 접선은 항상 2개이므로 직선 $y=2$ 외에 다른 접선이 존재한다. 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=2$ 또한 원 $x^2+y^2=4$ 밖의 점 $(2, 2)$에서의 접선임을 알 수 있다.

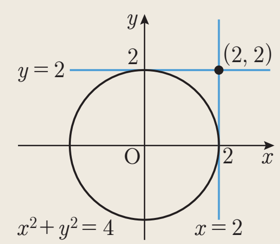


그림 12.14. 원 $x^2+y^2=4$ 밖의 점 $(2, 2)$에서 그은 접선

보기 정답

12.13 $y=-2x+5$ 또는 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

예제 08 다음 물음에 답하시오.

(1) 기울기가 3이고 원 $x^2+y^2=16$에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

(2) 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점 $(\sqrt{5}, 1)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(3) 점 $(4, 0)$에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 r의 값을 구하시오.

길잡이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하는 직선은 주어진 조건에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.

- 기울기가 m인 접선: $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
- 원 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선: $xx_1+yy_1=r^2$
- 원 밖의 점 (x_1, y_1)에서 그은 접선: 중심과 접선 $y=m(x-x_1)+y_1$ 사이의 거리가 r임을 이용하여 m의 값을 구함

- 기울기를 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식(p.439)
- 원 위의 점에서의 접선의 방정식(p.437)
- 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식(p.437)
- 두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)
- 이차방정식의 근과 계수의 관계(p.170)

풀 이

(1) 원 $x^2+y^2=16$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식은

$$y=3x\pm4\sqrt{3^2+1} \quad \Rightarrow \quad y=3x\pm4\sqrt{10}$$

[다른 풀이]
접선의 방정식을 $y=3x+n$이라 하면 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=4$이다. 따라서 $n=\pm4\sqrt{10}$이고 접선의 방정식은 $y=3x\pm4\sqrt{10}$이다.

(2) 원 $x^2+y^2=6$ 위의 점 $(\sqrt{5}, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{5}x+y=6 \quad \Rightarrow \quad y=-\sqrt{5}x+6$$

(3) 점 $(4, 0)$을 지나는 직선의 방정식의 기울기를 m이라 하면 $y=mx-4m$이다. 이 직선이 주어진 원에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=mx-4m$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같다. 즉,

$$\frac{|-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r \quad \Rightarrow \quad |4m|=r\sqrt{m^2+1}$$

이다. 양변을 제곱하면

$$16m^2=r^2(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad (r^2-16)m^2+r^2=0$$

이다. m에 대한 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 m_1, m_2는 서로 수직인 두 접선의 기울기이므로 $m_1m_2=-1$이다. 즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\frac{r^2}{r^2-16}=-1 \quad \Rightarrow \quad r^2=8$$

이다. 따라서 $r>0$이므로 $r=2\sqrt{2}$이다.

정답 (1) $y=3x\pm4\sqrt{10}$ (2) $y=-\sqrt{5}x+6$ (3) $2\sqrt{2}$

돌다리 두드리기

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $A(4, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

원 위의 점 $(4, 3)$에서의 접선의 방정식은 $4x+3y=25$이다.

돌다리 두드리기
|답| $4x+3y=25$

정답 및 풀이 p.572

개념 그대로

유제 08-1

직선 $y=x+3$과 수직이고 원 $x^2+y^2=8$에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

구하는 접선이 직선 $y=x+3$에 수직이므로 기울기가 -1이다. 즉, 접선의 방정식은 $y=-x+n$이다. 원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 $y+x-n=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|-n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |n|=4$$

이 성립한다. 따라서 $n=\pm4$이므로 구하는 접선은 $y=-x\pm4$이다.

답 $y=-x\pm4$

개념 그대로

유제 08-2

점 $(0,\ 3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식이 $my=x+n$일 때, 상수 m, n의 곱 mn의 값을 구하시오.

접선이 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$$3m=0+n \quad \Rightarrow \quad 3m=n$$

이고 이를 방정식 $my=x+n$에 대입하면

$$my=x+3m \quad \Rightarrow \quad x-my+3m=0$$

이다. 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 $x-my+3m=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2이다. 즉,

$$\frac{|3m|}{\sqrt{1+m^2}}=2 \quad \Rightarrow \quad 3|m|=2\sqrt{m^2+1}$$

이므로 양변을 제곱해서 정리하면

$$9m^2=4(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad m^2=\frac{4}{5}$$

이다. $n=3m$이므로 구하는 값은

$$mn=3m^2=3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$$

답 $\frac{12}{5}$

개념 바꾸기

유제 08-3

- 두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)
+ 표준형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.390)

원 $x^2+y^2=8$ 위의 두 점 $(2,\ -2)$, $(a,\ b)$에서의 접선이 서로 평행할 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$$2x-2y=8 \quad \Rightarrow \quad x-y=4$$

이다. 즉, $y=x-4$이므로 기울기가 1이다. 두 점 $(2,\ -2)$, $(a,\ b)$에서의 접선이 서로 평행하므로 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식 $ax+by=8$의 기울기도 1이어야 한다.

따라서 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{8}{b}$에서 $-\frac{a}{b}=1$이므로 $\frac{a}{b}$의 값은 -1이다.

답 -1

원의 접선의 방정식의 응용

예제 09 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(-1, 3)$에서 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

(2) 점 $(4, 2)$에서 원 $x^2+y^2=16$에 그은 접선의 접점을 각각 P, Q라 할 때, 직선 PQ의 방정식을 구하시오.

길잡이

(1) 중심이 원점이 아닌 원에 접하는 직선은 원의 중심과 접선 사이의 거리와 원의 반지름의 길이가 같음을 이용하여 구한다.

(2) 원 $x^2+y^2=r^2$의 밖의 점 $A(a, b)$에서 원에 그은 두 접선의 접점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 지나는 직선을 구해보자. P, Q가 원 위의 점이므로 두 접선의 방정식은 각각

$$x_1x+y_1y=r^2, \quad x_2x+y_2y=r^2$$

이고, 두 접선이 모두 $A(a, b)$를 지나므로

$$x_1a+y_1b=r^2, \quad x_2a+y_2b=r^2 \qquad \cdots ㉠$$

을 만족한다. 이때 직선 $ax+by=r^2$은 ㉠에 의하여 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 지나고, 두 점을 지나는 직선은 유일하므로

두 접점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $ax+by=r^2$

풀이

(1) 점 $(-1, 3)$에서 원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하자. 기울기가 m이고 점 $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=m(x+1) \quad \Rightarrow \quad mx-y+m+3=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이 직선과 원의 중심 $(2, 1)$ 사이의 거리가 반지름의 길이이므로

$$\frac{|m\cdot 2-1+m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \quad \Rightarrow \quad |3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$(3m+2)^2=4(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad m(5m+12)=0$$

에서 $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$이므로 ㉡에 대입하면 구하는 방정식은

$$y=3 \quad \text{또는} \quad y=-\frac{12}{5}x+\frac{3}{5}$$

(2) 원 밖의 점 $(4, 2)$에서 원에 그은 접선의 두 접점을 지나는 방정식은

$$4x+2y=16 \quad \Rightarrow \quad 2x+y=8$$

정답 (1) $y=3$ 또는 $y=-\frac{12}{5}x+\frac{3}{5}$ (2) $2x+y=8$

- 기울기를 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식(p.439)
- 접점을 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식(p.438)
- 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)

돌다리 두드리기

점 $(4, 6)$에서 $x^2+y^2=8$에 그은 접선의 두 접점 P, Q에 대하여 직선 PQ의 방정식을 구하시오.

원 밖의 점 $(4, 6)$에서 그은 접선의 두 접점 P, Q에 대하여 직선 PQ의 방정식은 $4x+6y=8$이므로 $2x+3y=4$이다.

돌다리 두드리기
|답| $2x+3y=4$

정답 및 풀이 p.573

개념 바꾸기

유제 09-1

− 접점을 이용한 원 밖의 점에서의 접선의 방정식(p.438)
+ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

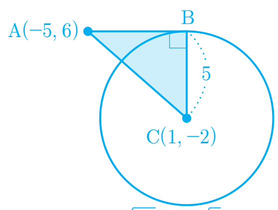
원 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ 밖의 한 점 A$(-5, 6)$에서 원에 접선을 그었을 때, 점 A와 접점 사이의 거리를 구하시오.

원의 접선은 원과 수직으로 만나고, 접선과 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이와 같다.
접점을 B라 하고 원의 중심을 C$(1, -2)$라 하자. 반지름의 길이가 5이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+25$$

이 성립한다. 두 점 사이의 거리를 이용하면

$$\overline{AC}^2=\sqrt{(-5-1)^2+(6+2)^2}^2=100$$



에서 $\overline{AB}^2=75$이다. 구하려는 길이는 선분 AB의 길이이므로 $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$이다.

답 $5\sqrt{3}$

개념 그대로

유제 09-2

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ 위의 점 $(-1, 0)$에서의 접선이 점 $(a, 9)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

원의 접선의 기울기를 m이라 하자. 접선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로 접선의 방정식은

$$y=m(x+1) \quad \Rightarrow \quad mx-y+m=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 원의 중심 $(2, -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같으므로

$$\frac{|m\cdot 2-(-1)+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$$

에서 $|3m+1|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$10(m^2+1)=(3m+1)^2 \quad \Rightarrow \quad (m-3)^2=0$$

에서 $m=3$이다. 이를 직선 ㉠에 대입하면 $y=3x+3$이다. 이 직선이 점 $(a, 9)$를 지나므로 대입하면 $9=3a+3$에서 $a=2$이다.

답 2

개념 더하기

유제 09-3

+ 일반형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.392)

원 $x^2+y^2=36$ 밖의 한 점 A에서 이 원에 그은 두 접선과의 두 교점 B, C를 지나는 직선의 방정식이 $2x-5y=18$일 때, 점 A의 좌표를 구하시오.

점 A(a, b)로 놓으면 점 A에서 원에 그은 접선과 원의 두 교점 B, C를 잇는 직선의 방정식은

$$ax+by=36 \quad \Rightarrow \quad ax+by-36=0$$

이다. 직선 $ax+by-36=0$이 직선 $2x-5y-18=0$과 일치하려면

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{-5}=\frac{-36}{-18} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}=-\frac{b}{5}=2$$

에서 $a=4$, $b=-10$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(4, -10)$이다.

답 A$(4, -10)$

12-1 원의 방정식 [1-4]

다음 조건을 만족하는 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 $(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원

(2) 중심이 $(3,\ -4)$이고 y축에 접하는 원

(3) 점 $(-2,\ -1)$을 지나고 x축, y축 모두 접하는 원 중 작은 원

(1) 중심이 $(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 **원(p.412)**의 방정식은 $(x-0)^2+(y-1)^2=2^2$에서 $x^2+(y-1)^2=4$이다.

(2) 중심이 $(3,\ -4)$이고 y축에 접하려면 반지름의 길이가 3이므로 **원(p.415)**의 방정식은 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$이다.

(3) x축과 y축에 동시에 접하므로 반지름의 길이를 r이라 하면 **원(p.415)**이 제3사분면에 있으므로 중심이 $(-r,\ -r)$이다. 즉, 방정식 $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$이 점 $(-2,\ -1)$을 지나므로

$$(-2+r)^2+(-1+r)^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad (r-5)(r-1)=0$$

에서 $r=1$ 또는 $r=5$인데, 작은 원이므로 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$이다.

답 (1) $x^2+(y-1)^2=4$
(2) $(x-3)^2+(y+4)^2=9$
(3) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

12-2

중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고, 두 점 $(0,\ -1)$, $(4,\ 1)$을 지나는 원의 반지름의 길이를 구하시오.

원의 중심을 $(a,\ a+1)$이라 하고, 반지름의 길이를 r라 하면 **원(p.412)**을

$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2 \qquad \cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다. 방정식 ㉠이 두 점 $(0,\ -1)$, $(4,\ 1)$을 지나므로

$$(0-a)^2+(-1-a-1)^2=(4-a)^2+(1-a-1)^2$$
$$2a^2+4a+4=2a^2-8a+16$$
$$12a=12$$

에서 $a=1$이다. 따라서 원의 중심은 $(1,\ 2)$이고,

$$(0-1)^2+(-1-2)^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad 10=r^2$$

에서 $r>0$이므로 $r=\sqrt{10}$이다.

답 $\sqrt{10}$

12-3

좌표평면에서 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(6,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 각각 구하시오.

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ($a,\ b,\ c$는 상수)이라 하면 이 **원(p.414)**이 세 점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$, $\mathrm{B}(6,\ 1)$, $\mathrm{C}(-1,\ 0)$을 지나므로

$$-2a+b+c+5=0$$
$$6a+b+c+37=0$$
$$-a+c+1=0$$

이다. 세 식을 **연립(p.250)**하여 풀면

$$a=-4,\quad b=-8,\quad c=-5$$

이므로 구하려는 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x-8y-5=0$이다. 이를 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$(x-2)^2+(y-4)^2=25$$

이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(2,\ 4)$이고 반지름의 길이는 5이다.

답 중심: $(2,\ 4)$, 반지름의 길이: 5

12-4

두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$인 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}$에서

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=4\overline{\mathrm{BP}}^2$$

이 성립한다. 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$(x+3)^2+(y-1)^2=4\{(x-3)^2+(y-4)^2\}$$
$$3x^2-30x+3y^2-30y+90=0$$
$$x^2-10x+y^2-10y+30=0$$
$$(x-5)^2+(y-5)^2=20$$

이다. 즉, 점 P가 그리는 도형은 **원(p.415)**이고, 그 **원(p.412)**의 방정식은 $(x-5)^2+(y-5)^2=20$이다.

답 $(x-5)^2+(y-5)^2=20$

12-5 원과 직선의 위치 관계 [5-9]

직선 $y=mx+4$가 원 $x^2+(y-2)^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 자연수 m의 최솟값을 구하시오.

원과 직선(p.420)이 서로 다른 두 점에서 만나면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 한다. 즉, 원의 중심 $(0,\ 2)$와 직선 $mx-y+4=0$ 사이의 **거리(p.401)** d는

$$d=\frac{|-2+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

이므로 $\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}<1$에서

$$2<\sqrt{m^2+1}$$

을 만족해야 한다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$4<m^2+1 \quad\Rightarrow\quad 3<m^2$$

에서 **이차부등식(p.299)**을 풀면 $m>\sqrt{3}$ 또는 $m<-\sqrt{3}$이다. 이를 만족하는 자연수 m의 최솟값은 2이다.

답 2

12-6

직선 $x+ay-3=0$이 두 원

$$x^2+y^2+by=0,\quad x^2+y^2+4x-10y+4=0$$

의 중심을 모두 지나도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오.

주어진 두 원의 방정식을 **표준형(p.412)**으로 변형하면 각각

$$x^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4} \qquad \cdots ㉠$$
$$(x+2)^2+(y-5)^2=25 \qquad \cdots ㉡$$

이다. 이때 직선 $x+ay-3=0$이 두 원 ㉠, ㉡의 중심인 $\left(0,\ -\dfrac{b}{2}\right)$, $(-2,\ 5)$를 지나므로 각각 대입하면

$$-\frac{ab}{2}-3=0 \quad\Rightarrow\quad ab=-6$$
$$-2+5a-3=0 \quad\Rightarrow\quad a=1$$

에서 $a=1$, $b=-6$이고 $a-b=1-(-6)=7$이다.

답 7

12-7

원 $x^2+y^2=12$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=-x+\sqrt{6}$ 위를 움직이는 두 점 A, B가 있다. 삼각형 PAB가 정삼각형이 되도록 세 점 P, A, B를 움직일 때, 정삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하시오.

원 $x^2+y^2=12$ 위의 한 점 P와 직선 $x+y-\sqrt{6}=0$ 사이의 거리의 최댓값이 구하고자 하는 정삼각형 PAB의 높이이다. 원의 중심인 원점과 직선 $x+y-\sqrt{6}=0$ 사이의 **거리(p.401)** d는

$$d=\frac{|0+0-\sqrt{6}|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{3}$$

이다. **원과 직선 사이의 거리의 최댓값(p.420)**은 $d+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$이다. 정삼각형의 넓이가 최대일 때의 정삼각형의 높이가 $3\sqrt{3}$이므로 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=3\sqrt{3}$ 에서 $a=6$이다. 따라서, 정삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 다음과 같다.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$$

답 $9\sqrt{3}$

12-8

두 원 $C_1: x^2+y^2+2x-4y-4=0$, $C_2: x^2+y^2-6x-10y+2k=0$의 공통현의 길이가 $2\sqrt{5}$가 되도록 하는 양수 k의 값을 구하시오.

두 원의 **공통현의 방정식(p.424)**을 구하면

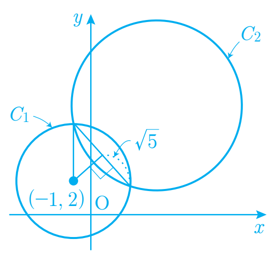
$$(x^2+y^2+2x-4y-4)-(x^2+y^2-6x-10y+2k)=0$$

에서 $4x+3y-2-k=0$이다. 원 C_1을 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

에서 중심이 $(-1, 2)$이고 반지름의 길이가 3인 원이다. **이 원의 중심 $(-1, 2)$과 공통현 사이의 거리는(p.400)**

$$\frac{|-4+6-2-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{k}{5}$$



이다. 이때, 공통현의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$2\cdot\sqrt{3^2-\left(\frac{k}{5}\right)^2}=2\sqrt{5}$에서 $k^2=100$이고, $k>0$이므로 $k=10$이다.

답 10

12-9

두 원 $x^2+y^2-4x+6y=12$, $x^2+y^2+4x-6y=28$의 교점을 지나고 중심이 x축 위에 있는 원의 둘레의 길이를 구하시오.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식(p.425)은

$$x^2+y^2-4x+6y-12+k(x^2+y^2+4x-6y-28)=0$$

(단, $k\neq-1$)이다. 이 원의 방정식을 정리하면

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(4k-4)x+(6-6k)y-12-28k=0 \quad \cdots ㉠$$

이다. 이 원의 중심이 x축 위에 있으므로 구하는 원의 중심의 y좌표는 0이다. 즉, y의 계수가 0이므로

$$6-6k=0$$

에서 $k=1$이다. $k=1$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2=20$$

이므로 문제에서 주어진 두 원의 교점을 지나는 원은 중심이 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원이다. 따라서 이 원의 둘레의 길이는 $2\cdot 2\sqrt{5}\pi=4\sqrt{5}\pi$이다.

답 $4\sqrt{5}\pi$

12-10 원의 접선의 방정식 [10-12]

원 $x^2+y^2+6x-8y=a$에 접하는 평행한 두 직선 사이의 거리가 12일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

주어진 원의 방정식을 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$(x+3)^2+(y-4)^2=a+25 \quad \cdots ㉠$$

이다. 한편 **원에 접하고(p.420)** 기울기가 평행한 두 접선 사이의 거리는 항상 원의 지름의 길이와 같다. 따라서 원 ㉠의 반지름의 길이는 $\sqrt{a+25}$이므로

$$2\sqrt{a+25}=12$$

를 만족해야 한다. 즉 $\sqrt{a+25}=6$이므로 $a+25=36$이다. 따라서 $a=11$이다.

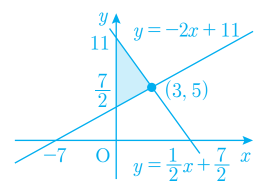
답 11

12-11

점 $(3, 5)$에서 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

접선이 점 $(3, 5)$를 지나므로 기울기를 m이라 하면 $y-5=m(x-3)$에서 $mx-y-3m+5=0$이다. 원의 중심 $(2, 2)$와 직선 $mx-y-3m+5=0$ 사이의 **거리(p.400)**가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|2m-2-3m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$



에서 $|-m+3|=\sqrt{5m^2+5}$이다. 양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=(2m-1)(m+2)=0$이므로 $m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$이다. 즉, 접선의 방정식은 $y=-2x+11$ 또는 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$이므로 구하려는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(11-\frac{7}{2}\right)\times 3=\frac{45}{4}$이다.

답 $\frac{45}{4}$

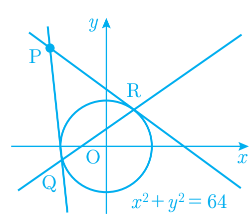
12-12

원 $x^2+y^2=64$ 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선과 원의 교점 Q, R를 지나는 직선의 방정식이 $-3x+5y=16$일 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

점 $P(a, b)$라 하면 점 P에서 **접선(p.438)**이 원과 만나는 두 접점 Q, R를 지나는 직선의 방정식은

$$ax+by=64$$

이다. 따라서 $ax+by=64$는 $-3x+5y=16$과 **일치(p.392)**해야 하므로 $a=-12$, $b=20$이다. 즉, 점 P의 좌표는 $(-12, 20)$이다.



답 $P(-12, 20)$

12-1

두 점 (2, 1), (4, −3)을 이은 선분을 빗변으로 하는 직각삼각형의 외접원의 방정식을 구하시오.

직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 **중점(p.363)**이므로 외접원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓으면

$$a=\frac{2+4}{2}=3,\quad b=\frac{1+(-3)}{2}=-1 \quad \Rightarrow \quad (3,\ -1)$$

이다. 또, 외접원의 지름의 길이는 빗변의 **거리(p.353)**와 같으므로

$$\sqrt{(4-2)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$$

이다. 따라서 구하는 **원(p.412)**의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-3)^2+(y+1)^2=5$$

답 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$

12-2

원 $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 A(−3, 1)에 대하여 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 점 M이 그리는 도형의 넓이를 구하시오.

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$로 놓으면 **원(p.413)** 위의 점이므로

$$a^2+b^2-6a+4b+4=0 \qquad \cdots ㉠$$

을 만족하고, 점 M의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓으면

$$x=\frac{-3+a}{2},\ y=\frac{1+b}{2} \quad \Rightarrow \quad a=2x+3,\ b=2y-1$$

이다. 이를 ㉠에 대입하면

$$(2x+3)^2+(2y-1)^2-6(2x+3)+4(2y-1)+4=0$$

이다. 식을 정리하여 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

이다. 따라서 선분의 **중점(p.363)**이 그리는 도형은 중심의 좌표가 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는 $\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi=\frac{9}{4}\pi$이다.

답 $\frac{9}{4}\pi$

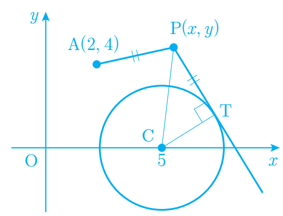
12-3

원 $x^2+y^2-10x+16=0$ 밖의 한 점 P에서 이 원에 그은 접선의 접점을 T라 하자. 점 A(2, 4)에 대하여 $\overline{PT}=\overline{PA}$를 만족시키는 점 P의 도형의 방정식을 구하시오.

원의 방정식 $x^2+y^2-10x+16=0$을 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$(x-5)^2+y^2=9$$

이다. 원의 중심을 C라 하면 C(5, 0)이고 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자. 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 피타고라스의 정리에 의하여



$$\overline{PT}^2+\overline{CT}^2=\overline{PC}^2$$

이므로

$$\overline{PT}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{CT}^2}$$
$$=\sqrt{(x-5)^2+y^2-3^2}=\sqrt{x^2+y^2-10x+16}$$

이다. 한편, **선분 PA의 길이(p.353)**는

$$\overline{PA}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$$

이고, 문제의 조건에서 $\overline{PT}=\overline{PA}$이므로

$$\sqrt{x^2+y^2-10x+16}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2+y^2-10x+16=x^2-4x+4+y^2-8y+16$$

에서 $3x-4y+2=0$이다. 따라서 점 P의 **도형의 방정식(p.381)**은 $3x-4y+2=0$이다.

답 $3x-4y+2=0$

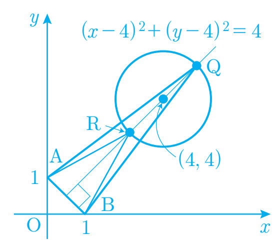
12-4

좌표평면 위의 두 점 A(0, 1), B(1, 0)과 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P를 Q라 하고, 최소일 때의 점 P를 R라 하자. 삼각형 BQR의 넓이를 구하시오.

원(p.412) $(x-4)^2+(y-4)^2=4$의 중심을 지나고 직선 AB에 **수직(p.391)**인 직선과 원이 만나는 점은 Q, R이다. 직선 AB의 기울기는 $\frac{0-1}{1-0}=-1$이므로 직선 QR의 기울기는 1이고 점 (4, 4)를 지나므로 **직선 QR의 방정식(p.379)** 은 $y=x$이다. 점 B(1, 0)과 직선 $x-y=0$ 사이의 **거리(p.401)**는

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이고,



$\overline{QR}=$ (주어진 원의 지름) $=4$

이므로 삼각형 BQR의 밑변을 선분 $\overline{QR}$로 잡으면 높이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. 따라서 삼각형 BQR의 넓이는

$$\triangle BQR=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

에서 $\sqrt{2}$이다.

답 $\sqrt{2}$

정답 및 풀이 p.575

12-5

원 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$의 넓이와 네 직선 $x=0$, $x=6$, $y=-1$, $y=-5$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 x절편을 구하시오.

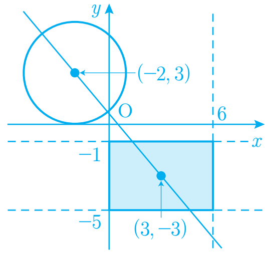
$x^2+y^2+4x-6y+4=0$을 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$(x+2)^2+(y-3)^2 \Rightarrow 9$$

이다. 네 직선 $x=0$, $x=6$, $y=-1$, $y=-5$로 둘러싸인 직사각형의 두 대각선의 **교점(p.363)**의 좌표는

$$\left(\frac{0+6}{2},\ \frac{-1-5}{2}\right)=(3,\ -3)$$

이다. 따라서 원의 넓이와 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 점 $(-2,\ 3)$, $(3,\ -3)$을 지나므로



$$y-3=\frac{-3-3}{3+2}(x+2) \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}$$

이다. 이 **직선(p.379)**의 x절편은 $y=0$일 때의 x의 값이므로 $\frac{1}{2}$이다.

답 $\frac{1}{2}$

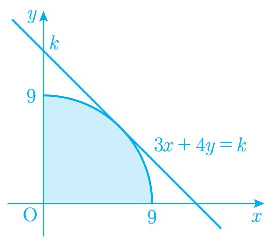
12-6

길이가 9인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 점 P가 이 반원의 호 위를 움직일 때, $3\overline{AP}+4\overline{BP}$의 최댓값을 구하시오.

$\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하면 지름에 대한 원주각으로 $\angle APB=90°$이므로

$$x^2+y^2=81 \quad (\text{단}, x\ge 0,\ y\ge 0)$$

이다. $3\overline{AP}+4\overline{BP}$, 즉 $3x+4y=k$라 하면 k의 최댓값은 직선 $3x+4y=k$가 그림과 같이 원 $x^2+y^2=81$에 **접할 때(p.420)**이므로 $k>0$이다. 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $3x+4y-k=0$까지의 **거리(p.401)**가 9이므로



$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=9 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{5}=9$$

에서 $k=45$이다.

답 45

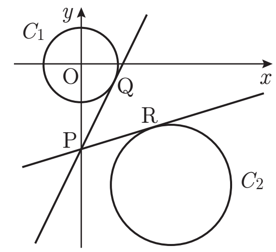
12-7

좌표평면에 두 원

$C_1 : x^2+y^2=1$,

$C_2 : x^2+y^2-6x+8y+21=0$

이 있다. 그림과 같이 y축 위의 점 P에서 원 C_1에 그은 한 접선의 접점을 Q, 점 P에서 원 C_2에 그은 한 접선의 접점을 R라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PR}$일 때, 점 P의 y좌표를 구하시오.



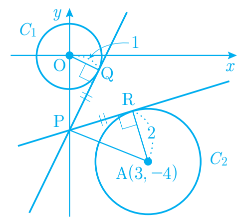
점 P의 좌표를 $P(0,\ a)$라 하자. 직각삼각형 OPQ에서 피타고라스의 정리를 이용하면

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=a^2-1$$

이다. $x^2+y^2-6x+8y+21=0$을 **표준형(p.412)**으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y+4)^2=2^2$$

이므로 원 C_2는 중심이 $(3,\ -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다. 따라서 원 C_2의 중심을 A라 하면 $A(3,\ -4)$이다. 직각삼각형 APR에서 피타고라스 정리를 이용하면



$\overline{PR}^2=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2=a^2+8a+21$이다. $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$$a^2-1=a^2+8a+21 \quad \Rightarrow \quad 8a=-22$$

에서 $a=-\frac{11}{4}$이다.

답 $-\frac{11}{4}$

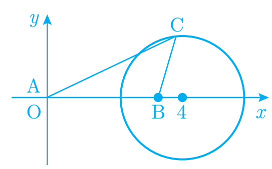
12-8

삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}=3$이고, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$라 하자. $4a^2=b^2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하시오.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$으로 하여 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내자. 문제의 조건에서 $4a^2=b^2$, 즉 **두 점 사이의 거리(p.415)** 공식에서 $4\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$ $(y\neq 0)$라 하면

$$4\{(x-3)^2+y^2\}=x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-8x+12=0$$

이고, **원의 방정식의 표준형(p.412)**으로 변형하면 $(x-4)^2+y^2=4$이다. 즉, 점 C는 중심의 좌표가 $(4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다. 이때, $\overline{AB}=3$으로 일정하므로 점 C와 x축 사이의 거리가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다. 따라서, 삼각형 ABC의 넓이는 점 C의 좌표가 $(4,\ 2)$ 또는 $(4,\ -2)$일 때 최대가 되고, 그 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$이다.



답 3

13 도형의 이동

정의 & 포인트 확인

- 점의 평행이동
- 도형의 평행이동

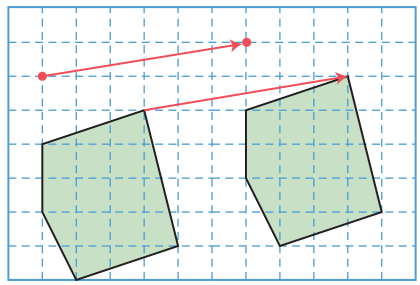
- 점의 대칭이동
- 도형의 대칭이동

- 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

13-1 평행이동

평행이동

점 또는 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라 한다.



점의 평행이동

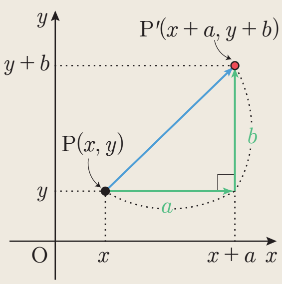


그림 13.1. 점의 평행이동

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면 각각의 좌표는 $x' = x+a$, $y' = y+b$이다. 즉, $P'(x+a, y+b)$이다.

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하는 것을 기호로

$$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$$

와 같이 나타내기도 한다.

포인트 상 13.1 **점의 평행이동**

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼

평행이동한 점을 P′라 하면 점 P′의 좌표는 다음과 같다.

$$P'(x+a, y+b)$$

예시 점 $P(2, 1)$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면 각각의 좌표는 $x' = 2+4$, $y' = 1+3$이므로 $P'(6, 4)$이다.

보기 13.1 다음 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) $(0, 0)$ (2) $(2, 3)$ (3) $(-2, 1)$

보기 정답

13.1 (1) $(2, -1)$ (2) $(4, 2)$
(3) $(0, 0)$

도형의 평행이동

좌표평면에서 직선의 방정식(p.381)과 원의 방정식(p.413)은 각각

$$ax+by+c=0, \qquad x^2+y^2+ax+by+c=0$$

으로 나타낼 수 있듯이 좌표평면 위의 도형의 방정식은 항을 좌변으로 모두 이항하여

$$f(x,\ y)=0$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 좌표평면 위의 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구해보자. 도형 $f(x,\ y)=0$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면 각각의 좌표는

$$x'=x+a, \quad y'=y+b$$

이므로 이를 $x,\ y$에 대하여 나타내면

$$x=x'-a, \quad y=y'-b \qquad \cdots(13.1.1)$$

이다. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 방정식 $f(x,\ y)=0$을 만족하므로 (13.1.1)을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(x'-a,\ y'-b)=0 \qquad \cdots(13.1.2)$$

이다. 즉, 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$는 방정식 (13.1.2)를 만족한다. 그런데 일반적으로 도형의 방정식을 나타낼 때 $x',\ y'$보다는 $x,\ y$를 많이 사용하므로 (13.1.2)에서 $x',\ y'$을 $x,\ y$로 바꾸어 쓰면 평행이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

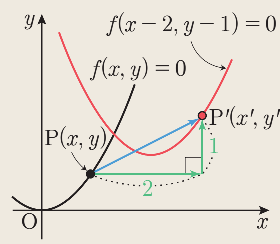


그림 13.2. 도형의 평행이동

포인트 상 13.2 **도형의 평행이동**

좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼

평행이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

점의 평행이동과 도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동할 때, 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여

$$\mathrm{P}(x,\ y) \longrightarrow \mathrm{P}'(x+a,\ y+b)$$
$$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x-a,\ y-b)=0$$

예시 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1$$

보기 13.2 다음 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) $y=3x-2$　　(2) $2x+3y+2=0$

(3) $x^2+y^2=9$　　(4) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

보기 정답

13.2 (1) $y=3x+5$
(2) $2x+3y+3=0$
(3) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$
(4) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$

예제 01

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(a,\ 4)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(1,\ b)$일 때, 상수 $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

(2) 직선 $y=2x+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이 $y=bx+7$일 때, 상수 $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

(3) 원 $(x-a)^2+(y-3)^2=9$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원이 $(x-2)^2+y^2=c$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 각각 구하시오.

길잡이 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표와 도형의 방정식은 다음과 같다.

- $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$
- $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x-a,\ y-b)=0$

풀 이

(1) 점 $(a,\ 4)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(1,\ b)$이므로

$$a-3=1,\ 4+2=b \quad \Rightarrow \quad a=4,\ b=6$$

(2) 직선 $y=2x+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-2$를, y 대신 $y-1$을 대입하여 구한다. 즉,

$$(y-1)=2(x-2)+a \quad \Rightarrow \quad y=2x+a-3$$

이다. 이 직선이 $y=bx+7$과 일치하므로 $a=10$이고 $b=2$이다.

(3) 원 $(x-a)^2+(y-3)^2=9$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-4$를, y 대신 $y-b$를 대입하여 구한다. 즉,

$$\{(x-4)-a\}^2+\{(y-b)-3\}^2=9 \quad \Rightarrow \quad (x-4-a)^2+(y-b-3)^2=9$$

이다. 이 원이 $(x-2)^2+y^2=c$와 일치하므로

$$a+4=2,\ b+3=0,\ 9=c \quad \Rightarrow \quad a=-2,\ b=-3,\ c=9$$

정답 (1) $a=4,\ b=6$ (2) $a=10,\ b=2$ (3) $a=-2,\ b=-3,\ c=9$

• 도형의 평행이동(p.451)
• 점의 평행이동(p.450)

돌다리 두드리기

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2,\ 1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(5,\ b)$일 때, 상수 $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

(2) 직선 $y=ax+3$을 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선이 $y=-x+5$일 때, 상수 $a,\ b$의 값을 각각 구하시오.

(1) 점 $(2+a,\ 1+2)$가 점 $(5,\ b)$와 일치하므로 $a=3,\ b=3$이다.
(2) 직선 $(y-3)=a(x-b)+3$이 직선 $y=-x+5$와 일치하므로 $y=ax-ab+6=-x+5$에서 $a=-1,\ b=-1$이다.

돌다리 두드리기

|답| (1) $a=3,\ b=3$
(2) $a=-1,\ b=-1$

정답 및 풀이 p.577

개념 그대로

유제 01-1

점 $(6,\ 3)$이 점 $(2,\ 5)$로 이동하는 평행이동에 의하여 다음 도형이 옮겨지는 도형을 구하시오.

(1) $y=-3x+6$　　(2) $y=x^2-2x+3$　　(3) $(x+1)^2+(y-3)^2=4$

점 $(6,\ 3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로

$$6+a=2,\ 3+b=5 \quad\Rightarrow\quad a=-4,\ b=2$$

이다. 따라서 주어진 평행이동은

$$x\text{축의 방향으로 } -4\text{만큼, } y\text{축의 방향으로 } 2\text{만큼}$$

이동하는 평행이동이므로, 평행이동한 도형은 x 대신 $x+4$, y 대신 $y-2$를 대입하여 구할 수 있다.

(1) 직선 $y=-3x+6$은

$$(y-2)=-3(x+4)+6 \quad\Rightarrow\quad y=-3x-4$$

로 옮겨진다.

(2) 곡선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$는

$$y-2=\{(x+4)-1\}^2+2 \quad\Rightarrow\quad y=x^2+6x+13$$

으로 옮겨진다.

(3) 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$는

$$\{(x+4)+1\}^2+\{(y-2)-3\}^2=4$$
$$\Rightarrow\quad (x+5)^2+(y-5)^2=4$$

로 옮겨진다.

답 (1) $y=-3x-4$
(2) $y=x^2+6x+13$
(3) $(x+5)^2+(y-5)^2=4$

개념 그대로

유제 01-2

점 $(1,\ -4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a^2만큼 평행이동한 점이 제2사분면 위의 점일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하시오. (단, 사분면은 좌표축을 포함하지 않는다.)

점 $(1,\ -4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a^2만큼 평행이동한 점은

$$(1+a,\ -4+a^2)$$

이다. 이 점이 제2사분면 위의 점이면 x좌표가 음수, y좌표가 양수이다.

(i) $1+a<0$에서 $a<-1$이다.
(ii) $-4+a^2>0$에서 $a^2-4=(a+2)(a-2)>0$이므로 $a<-2$ 또는 $a>2$이다.

따라서 실수 a의 범위는 (i), (ii)의 공통부분으로 $a<-2$이다.

답 $a<-2$

개념 더하기

유제 01-3

+ 원과 직선의 위치 관계(p.420)

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=8$을 x축으로 a만큼, y축으로 $2-a$만큼 평행이동한 도형이 직선 $y=2x$에 의하여 넓이가 이등분될 때, 상수 a의 값을 구하시오.

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=8$을 x축으로 a만큼, y축으로 $2-a$만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-(2-a)$를 대입하면

$$\{(x-a)-3\}^2+\{(y-2+a)-1\}^2=8$$
$$\Rightarrow\quad (x-a-3)^2+(y+a-3)^2=8$$

이다. 이 원을 직선 $y=2x$가 이등분하므로 원의 중심 $(a+3,\ 3-a)$이 직선 $y=2x$ 위에 있다. 따라서 직선의 방정식에 $x=a+3$, $y=3-a$를 대입하면

$$3-a=2(a+3) \quad\Rightarrow\quad 3a=-3$$

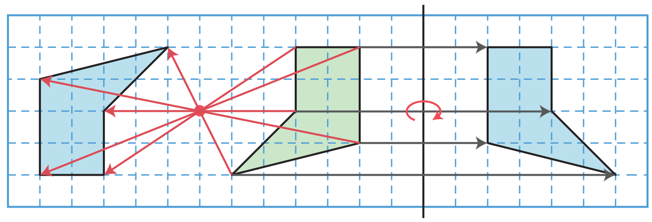
에서 구하는 값은 $a=-1$이다.

답 -1

13-2 대칭이동

대칭이동

점 또는 도형을 한 점 A에 대하여 대칭인 점 또는 도형으로 옮기는 것을 점 A에 대한 대칭이동이라 하고, 이때 점 A를 대칭의 중심이라 한다. 또한 점 또는 도형을 한 직선 l에 대하여 대칭인 점 또는 도형으로 옮기는 것을 직선 l에 대한 대칭이동이라 하고, 이때 직선 l을 대칭축이라 한다.



대칭이동의 원리는 다음과 같다.

- 점 A에 대한 대칭이동은 대칭하는 두 점을 이은 선분의 중점이 점 A이다.
- 직선 l에 대한 대칭이동은 대칭하는 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이 직선 l이다.

점의 대칭이동

x축, y축, 원점에 대한 대칭이동

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 구해보자.

- 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_x의 좌표는 $\mathrm{P}_x(x, -y)$이다.
  $\Rightarrow$ x좌표는 변하지 않고 y좌표의 부호는 반대가 된다.
- 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_y의 좌표는 $\mathrm{P}_y(-x, y)$이다.
  $\Rightarrow$ y좌표는 변하지 않고 x좌표의 부호는 반대가 된다.
- 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_O의 좌표는 $\mathrm{P}_\mathrm{O}(-x, -y)$이다.
  $\Rightarrow$ 모든 좌표의 부호가 반대가 된다.

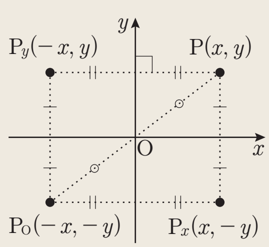


그림 13.3. 점 P의 x축, y축, 원점에 대한 대칭이동

직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x', y')$을 구해보자. 이때 직선 $y=x$는 선분 PP'의 수직이등분선이다. 따라서

- 선분 PP'의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2} \quad \Rightarrow \quad x'-y'=y-x \qquad \cdots (13.2.1)$$

- 선분 PP'은 직선 $y=x$와 수직이므로 두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)에 의하여

$$\frac{y-y'}{x-x'}\times 1=-1 \quad \Rightarrow \quad x'+y'=x+y \qquad \cdots (13.2.2)$$

(13.2.1), (13.2.2)를 연립하여 x', y'을 각각 구하면 $x'=y$, $y'=x$이므로 $\mathrm{P}'(y, x)$이다. 즉, x좌표와 y좌표가 서로 바뀐다.

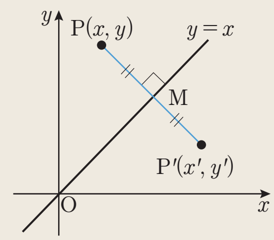


그림 13.4. 점 P의 직선 $y=x$에 대한 대칭이동

같은 방법으로 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x', y')$을 구해보자. 마찬가지로 직선 $y=-x$는 선분 PP'의 수직이등분선이다.

- 선분 PP'의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2} \quad \Rightarrow \quad x'+y'=-x-y \qquad \cdots (13.2.3)$$

- 선분 PP'은 직선 $y=-x$와 수직이므로 두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)에 의하여

$$\frac{y-y'}{x-x'}\times(-1)=-1 \quad \Rightarrow \quad x'-y'=x-y \qquad \cdots (13.2.4)$$

(13.2.3), (13.2.4)를 연립하여 x', y'을 각각 구하면 $x'=-y$, $y'=-x$이므로 $\mathrm{P}'(-y, -x)$이다. 즉, x좌표와 y좌표가 서로 바뀌고 부호도 바뀐다.

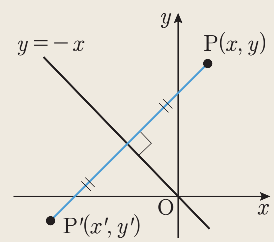


그림 13.5. 점 P의 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동

포인트 상 13.3 **점의 대칭이동**

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를

- x축에 대하여 대칭이동하면 $(x, -y)$이다.
- y축에 대하여 대칭이동하면 $(-x, y)$이다.
- 원점에 대하여 대칭이동하면 $(-x, -y)$이다.
- 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 (y, x)이다.
- 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $(-y, -x)$이다.

예 시 | 원점 $\mathrm{O}(0, 0)$은 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하여도 원점이다.

보기 13.3 점 $(2, 3)$을 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(1) x축　(2) y축　(3) 원점

(4) 직선 $y=x$　(5) 직선 $y=-x$

보기 정답

13.3 (1) $(2, -3)$ (2) $(-2, 3)$ (3) $(-2, -3)$ (4) $(3, 2)$ (5) $(-3, -2)$

도형의 대칭이동

좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 대칭이동한 도형의 방정식을 구해보자.

x축에 대한 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면

$$x'=x,\quad y'=-y \quad\Rightarrow\quad x=x',\quad y=-y' \qquad \cdots(13.2.5)$$

이다. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 방정식 $f(x,\ y)=0$을 만족하므로 (13.2.5)를 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(x',\ -y')=0 \qquad \cdots(13.2.6)$$

이다. 즉, 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$은 방정식 (13.2.6)을 만족한다. 그런데 일반적으로 도형의 방정식을 나타낼 때 x', y'보다는 x, y를 많이 사용하므로 (13.2.6)에서 x', y'을 x, y로 바꾸어 쓰면 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같게 된다.

$$f(x,\ -y)=0$$

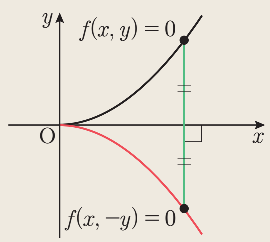
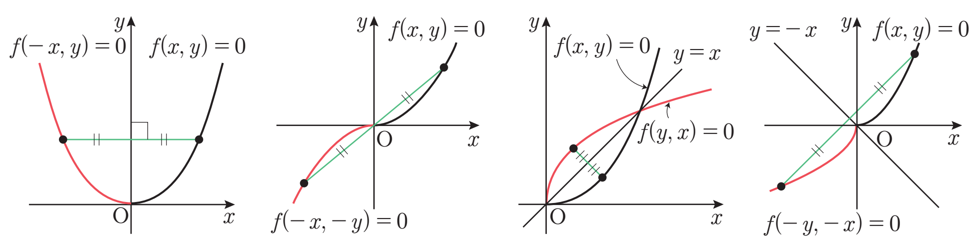


그림 13.6. 도형 $f(x,\ y)=0$의 x축에 대한 대칭이동

y축, 원점, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동

x축에 대한 대칭이동과 마찬가지 방법으로 $f(x,\ y)=0$을 y축, 원점, $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면 각각 다음과 같다.

$$f(-x,\ y)=0,\qquad f(-x,\ -y)=0,\qquad f(y,\ x)=0,\qquad f(-y,\ -x)=0$$



원은 평행이동, 대칭이동을 해도 원이고 반지름의 길이도 그대로이다. 따라서 원의 중심만 어디로 이동했는지 알면 평행이동하거나 대칭이동한 원의 방정식을 쉽게 구할 수 있다.

포인트 상 13.4 **도형의 대칭이동**

좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을

- x축에 대하여 대칭이동하면 $f(x,\ -y)=0$이다.
- y축에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ y)=0$이다.
- 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x,\ -y)=0$이다.
- 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $f(y,\ x)=0$이다.
- 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면 $f(-y,\ -x)=0$이다.

보기 13.4 직선 $y=-2x+4$를 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

(1) x축 (2) y축 (3) 원점 (4) $y=x$ (5) $y=-x$

보기 정답

13.4 (1) $y=2x-4$ (2) $y=2x+4$
(3) $y=-2x-4$ (4) $y=-\frac{1}{2}x+2$
(5) $y=-\frac{1}{2}x-2$

한 걸음 더

직선 $x=a$, 직선 $y=b$, 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭이동

앞서 배운 내용을 일반화하여 좌표평면 위의 점과 도형을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표와 도형의 방정식을 구해보자.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 직선 $x=a$에 대한 대칭이동 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면, 선분 PP'의 중점이 직선 $x=a$ 위의 점이다. 즉,

$$\frac{x+x'}{2}=a,\quad y=y' \quad\Rightarrow\quad x'=2a-x,\quad y'=y \qquad \cdots(13.2.7)$$

이므로

$$\mathrm{P}'(2a-x,\ y)$$

이다.

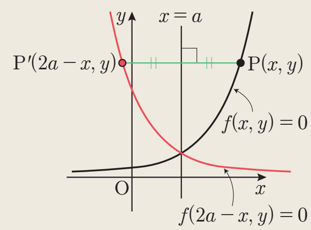


그림 13.7. 점 P와 도형 f의 직선 $x=a$에 대한 대칭이동

도형 $f(x,\ y)=0$의 직선 $x=a$에 대한 대칭이동 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하면, (13.2.7)에 의해

$$x'=2a-x,\quad y'=y \quad\Rightarrow\quad x=2a-x',\quad y=y' \qquad \cdots(13.2.8)$$

이다. 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $f(x,\ y)=0$을 만족하므로 (13.2.8)을 $f(x,\ y)=0$에 대입하면

$$f(2a-x',\ y')=0$$

이다. 즉, 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$는 방정식 $f(2a-x',\ y')=0$을 만족한다. 그런데 일반적으로 도형의 방정식을 나타낼 때 x, y를 많이 사용하므로 바꾸어 쓰면 $f(2a-x,\ y)=0$이다.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 도형 $f(x,\ y)=0$의 직선 $y=b$에 대한 대칭이동 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}''(x'',\ y'')$이라 하면, 선분 PP''의 중점이 직선 $y=b$ 위의 점이다. 즉,

$$x=x'',\quad \frac{y+y''}{2}=b \quad\Rightarrow\quad x''=x,\quad y''=2b-y$$

이므로 직선 $x=a$에 대한 대칭이동과 같은 방법으로 P''의 좌표와 P''이 만족하는 도형의 방정식을 구하면

$$\mathrm{P}''(x,\ 2b-y),\quad f(x,\ 2b-y)=0$$

이다.

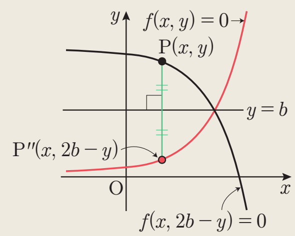


그림 13.8. 점 P와 도형 f의 직선 $y=b$에 대한 대칭이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$와 도형 $f(x,\ y)=0$의 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭이동 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'''(x''',\ y''')$이라 하면, 선분 PP'''의 중점이 점 $(a,\ b)$이다. 즉,

$$\frac{x+x'''}{2}=a,\quad \frac{y+y'''}{2}=b \quad\Rightarrow\quad x'''=2a-x,\quad y'''=2b-y$$

이므로 직선 $x=a$에 대한 대칭이동과 같은 방법으로 P'''의 좌표와 P'''이 만족하는 도형의 방정식을 구하면

$$\mathrm{P}'''(2a-x,\ 2b-y),\quad f(2a-x,\ 2b-y)=0$$

이다.

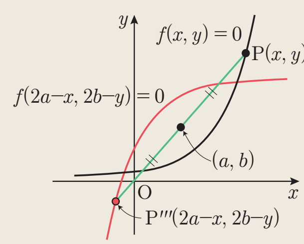


그림 13.9. 점 P와 도형 f의 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭이동

예제 02 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(1, -3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 직선 $3x+2y-5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식을 구하시오.

(3) 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$을 y축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

길잡이 점 (x, y)와 도형 $f(x, y)=0$의 대칭이동을 다음과 같이 정리할 수 있다.

	(x, y)	$f(x, y)=0$
x축	$(x, -y)$	$f(x, -y)=0$
y축	$(-x, y)$	$f(-x, y)=0$
원점	$(-x, -y)$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(y, x)	$f(y, x)=0$
$y=-x$	$(-y, -x)$	$f(-y, -x)=0$

풀 이

(1) 점 $(1, -3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, 3)$이고 이 점 $(1, 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3, 1)$이다.

(2) 직선 $3x+2y-5=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$3x-2y-5=0$$

이고 이 직선을 다시 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$-3x+2y-5=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-2y+5=0$$

(3) 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-4)^2+(y-3)^2=1$$

이고 이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(-y-4)^2+(x-3)^2=1 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y+4)^2=1$$

정답 (1) $(3, 1)$ (2) $3x-2y+5=0$ (3) $(x-3)^2+(y+4)^2=1$

- 도형의 대칭이동(p.456)
- 점의 대칭이동(p.455)
- 원의 방정식의 표준형(p.412)
- 직선의 방정식의 일반형(p.381)

돌다리 두드리기

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2, -5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 후, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| (1) $(-2, -5)$

(2) $(x+1)^2+(y+3)^2=4$

(1) 점 $(2, -5)$를 x축에 대하여 대칭이동하면 $(2, 5)$이고 다시 원점에 대하여 대칭이동하면 $(-2, -5)$이다.

(2) 원점에 대하여 대칭이동하면

$$(-x-3)^2+(-y-1)^2=(x+3)^2+(y+1)^2=4$$

이고, 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$$(y+3)^2+(x+1)^2=(x+1)^2+(y+3)^2=4$$

정답 및 풀이 p.577

개념 더하기

유제 02-1

+ 점의 평행이동(p.450)
+ 도형의 평행이동(p.451)

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(3,\ -5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 a만큼 평행이동하였더니 점 $(b,\ 2)$가 되었다. 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

(2) 곡선 $y=x^2-4x+6$을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 도형이 점 $(2,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) 점 $(3,\ -5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(-5,\ 3)$이다. 이 점을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점 $(-5,\ 3+a)$가 점 $(b,\ 2)$와 같으므로

$$-5=b,\ 3+a=2 \quad\Rightarrow\quad a=-1,\ b=-5$$

이다. 따라서 구하는 값은 $ab=5$이다.

(2) 주어진 곡선의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$$

이고, x축에 대하여 -3만큼 평행이동하면

$$y=\{(x+3)-2\}^2+2=(x+1)^2+2$$

이다. 이 곡선을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$y=(-x+1)^2+2$$

인데, 이 곡선이 점 $(2,\ a)$를 지나므로 구하는 값은$a=(-2+1)^2+2=3$이다.

답 (1) 5 (2) 3

개념 더하기

유제 02-2

+ 표준형으로 주어진 두 직선의 위치 관계(p.390)

직선 $y=3x+6$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선과 평행하고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

주어진 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=3x+6 \quad\Rightarrow\quad y=-3x-6$$

이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -3이다. 따라서 구하는 직선은 기울기가 -3이고 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$$y-2=-3(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=-3x+5$$

답 $y=-3x+5$

개념 더하기

유제 02-3

+ 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2,\ 3)$을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

(2) 원 $x^2+y^2-6x-2y+4=0$을 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_1, 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리를 구하시오.

(1) 점 $(2,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{A}(2,\ -3)$이고 점 $(2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(-2,\ 3)$이다. 원의 중심이 점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$$

으로 둘 수 있고, 원이 점 B를 지나는 경우 $r=\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$$r^2=\overline{\mathrm{AB}}^2=(-2-2)^2+(3+3)^2=52$$

이다. 따라서 구하는 원의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-2)^2+(y+3)^2=52$$

(2) 주어진 원의 방정식을 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y-1)^2=6$$

이다. 이 원의 중심 $(3,\ 1)$을 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(1,\ 3)$은 원 C_1의 중심이고, 원점에 대하여 대칭이동한 점 $(-3,\ -1)$은 원 C_2의 중심이다. 따라서 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리는 두 점 $(1,\ 3)$, $(-3,\ -1)$ 사이의 거리이므로 구하는 값은

$$\sqrt{(-3-1)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$$

답 (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=52$ (2) $4\sqrt{2}$

점 (a, b)에 대한 대칭이동

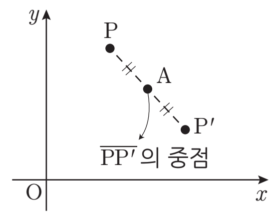
예제 03

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2, 5)$를 점 $(1, 7)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$를 점 $(-1, -2)$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

| 길잡이 | 점 P를 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 **점 A는 선분 PP′의 중점**이다.



| 풀 이 |

(1) 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 두면, 점 (a, b)와 점 $(2, 5)$를 잇는 선분의 중점이 $(1, 7)$이므로

$$\frac{2+a}{2}=1, \quad \frac{5+b}{2}=7$$

에서 $a=0$, $b=9$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, 9)$이다.

(2) 주어진 원의 중심 $(3, 2)$를 점 $(-1, -2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 $(-1, -2)$가 두 점 $(3, 2)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점이므로

$$\frac{3+a}{2}=-1, \quad \frac{2+b}{2}=-2$$

에서 $a=-5$, $b=-6$이다. 한편, 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 $(-5, -6)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다. 따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+5)^2+(y+6)^2=4$$

| 정답 | (1) $(0, 9)$ (2) $(x+5)^2+(y+6)^2=4$

- 도형의 대칭이동(p.456)
- 점의 대칭이동(p.455)
- 원의 방정식의 표준형(p.412)
- 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

돌다리 두드리기

다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(3, -1)$을 점 $(-2, 3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 원 $(x+1)^2+(y-4)^2=7$을 점 $(3, 0)$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | (1) $(-7, 7)$

(2) $(x-7)^2+(y+4)^2=7$

(1) 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(3, -1)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로 $\frac{3+a}{2}=-2$, $\frac{-1+b}{2}=3$에서 $a=-7$, $b=7$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-7, 7)$이다.

(2) 원의 중심 $(-1, 4)$를 점 $(3, 0)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(-1, 4)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점이 $(3, 0)$이므로 $\frac{-1+a}{2}=3$, $\frac{4+b}{2}=0$에서 $a=7$, $b=-4$이다. 따라서 $(x-7)^2+(y+4)^2=7$이다.

개념 줄이기

유제 03-1

– 원의 방정식의 표준형(p.412)

점 P(3, 1)을 점 A(4, −1)에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

점 A는 선분 PQ의 중점이므로 구하는 값은

$$\overline{PQ}=2\overline{AP}=2\sqrt{(4-3)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

개념 더하기

유제 03-2

+ 점과 직선 사이의 거리(p.401)
+ 원과 직선의 위치 관계(p.420)

원 $(x-1)^2+y^2=2$를 점 $(2, -1)$에 대하여 대칭이동한 원이 직선 $y=-x+a$와 접할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

원 $(x-1)^2+y^2=2$의 중심 $(1, 0)$을 점 $(2, -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (m, n)이라 하자. 점 $(2, -1)$은 두 점 $(1, 0)$과 (m, n)을 잇는 선분의 중점이므로

$$\frac{1+m}{2}=2, \quad \frac{0+n}{2}=-1$$

에서 $m=3$, $n=-2$이다. 따라서 대칭이동한 원은 중심이 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다. 한편, 대칭이동한 원이 직선 $y=-x+a$와 접하므로 원의 중심 $(3, -2)$와 직선 $x+y-a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이다. 따라서

$$\frac{|3-2-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |a-1|=2$$

에서 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

답 $a=-1$ 또는 $a=3$

개념 더하기

유제 03-3

+ 이차함수의 표준형(p.191)

두 곡선 $y=x^2-4x+3$, $y=-x^2+8x-5$가 점 (a, b)에 대하여 서로 대칭일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

두 곡선의 방정식을 정리하면

$$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1 \quad \cdots ㉠$$

$$y=-x^2+8x-5=-(x-4)^2+11 \quad \cdots ㉡$$

이다. 두 포물선 ㉠, ㉡이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점 $(2, -1)$과 $(4, 11)$도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다. 따라서 점 (a, b)가 두 점 $(2, -1)$과 $(4, 11)$을 잇는 선분의 중점이므로

$$a=\frac{2+4}{2}, \quad b=\frac{-1+11}{2}$$

에서 $a=3$, $b=5$이다.

답 $a=3$, $b=5$

직선 $y=ax+b$에 대한 대칭이동

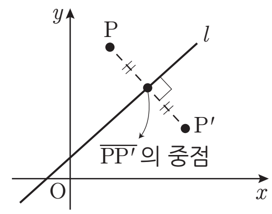
예제 04 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 $(2,\ -2)$를 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

(2) 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=1$을 직선 $y=-2x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구하시오.

길잡이 점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 P′은 다음 두 조건을 이용하여 구한다.

- **선분 PP′의 중점은 직선 l 위의 점이다.**
- **선분 PP′은 직선 l과 수직이다.**



풀이

(1) 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(2,\ -2)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{2+a}{2},\ \frac{-2+b}{2}\right)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{-2+b}{2}=\frac{2+a}{2}+1 \quad \Rightarrow \quad a-b=-6 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한 두 점 $(2,\ -2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=x+1$과 수직이므로

$$\frac{b+2}{a-2}\cdot 1=-1 \quad \Rightarrow \quad a+b=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3,\ 3)$이다.

(2) 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(-2,\ -1)$을 직선 $y=-2x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면, 두 점 $(-2,\ -1)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{a-2}{2},\ \frac{b-1}{2}\right)$이 직선 $y=-2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b-1}{2}=-2\cdot\frac{a-2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2a+b=5 \qquad \cdots ㉢$$

이고 두 점 $(-2,\ -1)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=-2x$와 수직이므로

$$\frac{b+1}{a+2}\cdot(-2)=-1 \quad \Rightarrow \quad a-2b=0 \qquad \cdots ㉣$$

이다. ㉢과 ㉣을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$이다. 즉, 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이고, 따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-1)^2=1$$

정답 (1) $(-3,\ 3)$ (2) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

- 도형의 대칭이동(p.456)
- 점의 대칭이동(p.455)
- 원의 방정식의 표준형(p.412)
- 두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)
- 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점(p.363)

돌다리 두드리기

점 $(0,\ 5)$를 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $(4,\ 3)$

대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(0,\ 5)$, $(a,\ b)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{0+a}{2},\ \frac{5+b}{2}\right)$가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $\frac{5+b}{2}=a$에서 $2a=5+b$이다. 또한, 두 점 $(0,\ 5)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 $y=2x$와 수직이므로 $\frac{b-5}{a-0}=-\frac{1}{2}$을 만족해야 한다. 즉, $-2b+10=a$이므로 $2a=b+5$와 연립하여 풀면 $b=3$이고 $a=4$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(4,\ 3)$이다.

정답 및 풀이 p.578

개념 그대로

유제 04-1

두 점 $(4,\ -1)$, $(0,\ 5)$가 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

두 점 $(4,\ -1)$, $(0,\ 5)$를 잇는 선분의 중점 $(2,\ 2)$가 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$$2a+b=2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한 두 점 $(4,\ -1)$, $(0,\ 5)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$$\frac{5-(-1)}{0-4}\cdot a=-\frac{3}{2}a=-1 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{2}{3}$$

이다. $a=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{2}{3}$이다.

답 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

개념 더하기

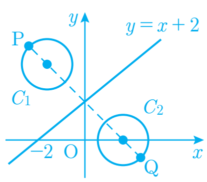
유제 04-2

+ 점과 직선 사이의 거리(p.401)
+ 두 원의 위치 관계(p.423)

원 $C_1:(x+2)^2+(y-4)^2=2$ 위의 한 점을 P라 하고, 원 C_1을 직선 $y=x+2$에 대하여 대칭이동한 원 C_2 위의 한 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이의 최댓값을 구하시오.

선분 PQ의 길이의 최댓값은

(원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리)
$+$(원 C_1의 반지름의 길이)$\times 2$



와 같다. 이때 두 원 C_1, C_2의 중심 사이의 거리는 원 C_1의 중심 $(-2,\ 4)$와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 2배이다. 점 $(-2,\ 4)$와 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-4+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

이므로

$$(\text{원 } C_1,\ C_2\text{의 중심 사이의 거리})=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$4\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 2=6\sqrt{2}$$

답 $6\sqrt{2}$

개념 더하기

유제 04-3

+ 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식(p.379)

직선 $y=2x-1$을 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

답 $y=\frac{1}{2}x+2$

직선 $y=2x-1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라 하자. 선분 PP′의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}+1 \quad \Rightarrow \quad x-y=-x'+y'-2 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한 직선 PP′과 직선 $y=x+1$이 서로 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x}\cdot 1=-1 \quad \Rightarrow \quad x+y=x'+y' \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠+㉡에서

$$2x=2y'-2 \quad \Rightarrow \quad x=y'-1$$

이고 ㉠−㉡에서

$$-2y=-2x'-2 \quad \Rightarrow \quad y=x'+1$$

이다. 이때 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$$x'+1=2(y'-1)-1 \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{1}{2}x'+2$$

이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+2$이다.

대칭이동을 이용한 거리의 합의 최솟값

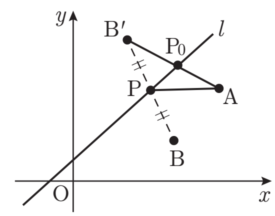
예제 05

두 점 A(4, 2), B(6, 2)와 x축 위의 한 점 P, 직선 $y=x$ 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}$의 최솟값을 구하시오.

길잡이 두 점 A, B가 직선 l에 대하여 같은 쪽에 있을 때, 직선 l위의 임의의 점 P에 대하여

- 점 B를 직선 l에 대칭이동한 점을 B$'$이라 하고,
- 선분 AB$'$과 직선 l의 교점을 P_0라 하면
- $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}=\overline{\text{AP}}+\overline{\text{B}'\text{P}}\geq\overline{\text{AP}_0}+\overline{\text{B}'\text{P}_0}=\overline{\text{AB}'}$ 이므로

$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}$의 최솟값은 선분 AB$'$의 길이이다.



풀 이

1단계 한 점은 x축에 대하여 대칭이동, 다른 한 점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한다.

점 A(4, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$, 점 B(6, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

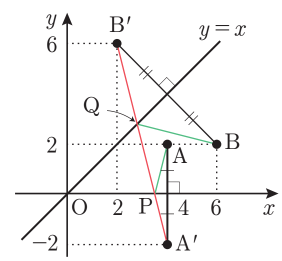
$$\text{A}'(4,\ -2),\quad \text{B}'(2,\ 6)$$

2단계 두 점을 잇는 가장 짧은 선은 직선임을 이용하여 길이의 최솟값을 구한다.

x축 위의 한 점 P, 직선 $y=x$ 위의 한 점 Q에 대하여

$$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{A}'\text{P}},\quad \overline{\text{BQ}}=\overline{\text{B}'\text{Q}}$$

이다. 두 점 A$'$, B$'$을 잇는 가장 짧은 선은 선분 A$'$B$'$이므로



$$\begin{aligned}\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}&=\overline{\text{A}'\text{P}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}'}\\&\geq\overline{\text{A}'\text{B}'}\\&=\sqrt{(2-4)^2+(6+2)^2}=2\sqrt{17}\end{aligned}$$

이다. 이때 등호는 두 점 P, Q가 선분 A$'$B$'$ 위에 있을 때 성립한다.
따라서 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}$의 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다.

정답 $2\sqrt{17}$

돌다리 두드리기

두 점 A(5, −3), B(2, −1)과 x축 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 A$'$(5, 3)이고, $\overline{\text{AP}}=\overline{\text{A}'\text{P}}$이므로
$\overline{\text{AP}}+\overline{\text{BP}}=\overline{\text{A}'\text{P}}+\overline{\text{BP}}\geq\overline{\text{A}'\text{B}}=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2}=5$

1 • 점의 대칭이동(p.455)

2 • 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리(p.353)

돌다리 두드리기
|답| 5

개념 그대로

유제 05-1

두 점 A$(a,\ 1)$, B$(-1,\ 3)$과 x축 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값이 5일 때, 실수 a의 값을 구하시오.

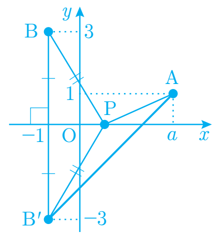
점 B$(-1,\ 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 할 때, 점 B$'$의 좌표는 B$'(-1,\ -3)$이다. 이때, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$$
$$=\sqrt{(-1-a)^2+(-3-1)^2}=5$$

이므로 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a+1)^2+16=25 \quad \Rightarrow \quad (a+1)^2=9$$

에서 $a=-4$ 또는 $a=2$이다.



답 $a=-4$ 또는 $a=2$

개념 그대로

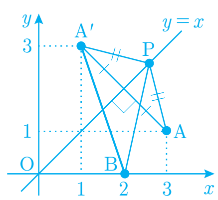
유제 05-2

두 점 A$(3,\ 1)$, B$(2,\ 0)$과 직선 $y=x$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

점 A$(3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 할 때, 점 A$'$의 좌표는 A$'(1,\ 3)$이다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$$
$$=\sqrt{(2-1)^2+(0-3)^2}$$
$$=\sqrt{10}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.



답 $\sqrt{10}$

개념 그대로

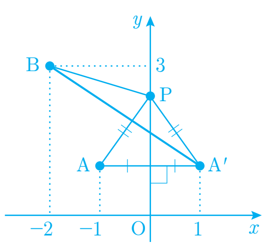
유제 05-3

두 점 A$(-1,\ 1)$, B$(-2,\ 3)$과 y축 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.

점 A$(-1,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 할 때, 점 A$'$의 좌표는 A$'(1,\ 1)$이다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$$
$$=\sqrt{(-2-1)^2+(3-1)^2}$$
$$=\sqrt{13}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\sqrt{13}$이다.



답 $\sqrt{13}$

13-3 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프는 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어 그리면 된다.

먼저 함수 $y=|x|$의 그래프를 그려보자. 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누면

$$\begin{cases} y=x & (x\geq 0) \\ y=-x & (x<0) \end{cases}$$

이다. 이 식을 각 범위에 따라 좌표평면 위에 나타내면 왼쪽 그림과 같다.

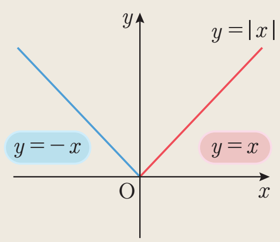


그림 13.10. 함수 $y=|x|$의 그래프

이번에는 함수 $y=|x-2|+1$의 그래프를 그려보자. 절댓값 기호 안의 식 $x-2$가 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누면

$$\begin{cases} y=x-1 & (x\geq 2) \\ y=-x+3 & (x<2) \end{cases}$$

이다. 이 식을 각 범위에 따라 좌표평면 위에 나타내면 왼쪽 그림과 같다. 이것은 함수 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다. 실제로 함수 $y=|x-2|+1$을 $y-1=|x-2|$와 같이 변형하면 **도형의 평행이동(p.451)**에 의하여 함수 $y=|x|$에서

$$x \longrightarrow x-2, \qquad y \longrightarrow y-1$$

과 같이 치환한 것과 같다.

일반적으로 함수 $y=|x-p|+q$의 그래프는 함수 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

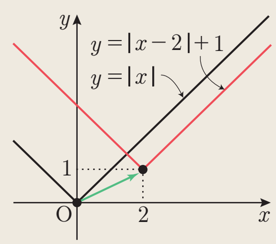


그림 13.11. 함수 $y=|x-2|+1$의 그래프

포인트 상 13.5 **절댓값 기호를 포함한 식의 그래프**

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프는 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어 그린다.

대칭이동을 이용한 식의 그래프

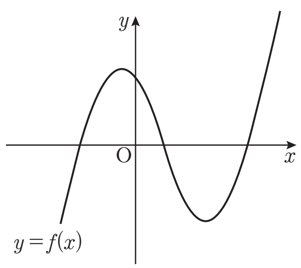
도형의 대칭이동(p.456)을 이용하면 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

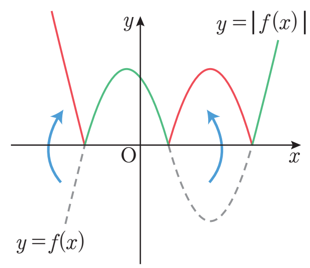
함수 $y=|f(x)|$의 그래프

함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 그리기 위해 절댓값 기호 안의 식 $f(x)$가 0이 되는 x의 값을 기준으로 $f(x)\geq 0$인 범위와 $f(x)<0$인 범위로 나누면

$$\begin{cases} y=f(x) & (f(x)\geq 0) \\ y=-f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

이다. 이때 함수 $y=-f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.





$y=-f(x)$
함수 $y=-f(x)$는 함수 $y=f(x)$를

$$x \longrightarrow x,\quad y \longrightarrow -y$$

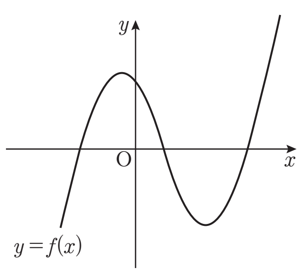
와 같이 치환한 함수이다. 즉, $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 함수이다.

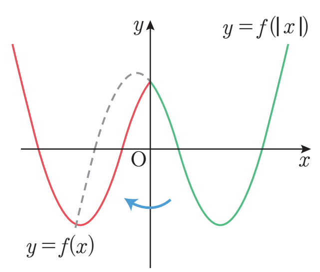
함수 $y=f(|x|)$의 그래프

함수 $y=f(|x|)$의 그래프를 그리기 위해 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누면

$$\begin{cases} y=f(x) & (x\geq 0) \\ y=f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이다. 이때 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x\geq 0$인 부분만 그린 후, $x<0$인 부분은 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.





$y=f(-x)$
함수 $y=f(-x)$는 함수 $y=f(x)$를

$$x \longrightarrow -x,\quad y \longrightarrow y$$

와 같이 치환한 함수이다. 즉, $y=f(x)$를 y축에 대하여 대칭이동한 함수이다.

$|y|=f(x)$가 나타내는 도형

$|y|=f(x)$가 나타내는 도형을 그리기 위해 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 y의 값을 기준으로 범위를 나누면

$$\begin{cases} y=f(x) & (y\geq 0) \\ y=-f(x) & (y<0) \end{cases}$$

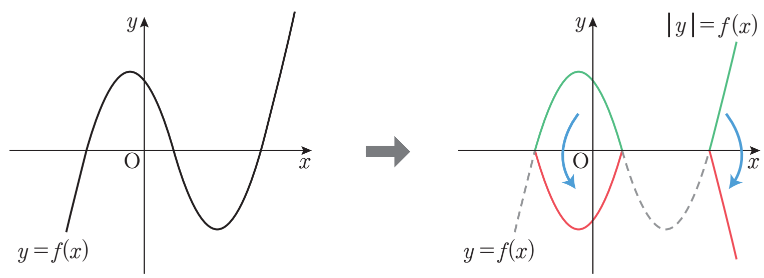
이다. 이때 함수 $y=-f(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $y\geq 0$인 부분만 그린 후, $y<0$인 부분은 $y\geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.

$y=-f(x)$

함수 $y=-f(x)$는 함수 $y=f(x)$를

$$x \longrightarrow x,\quad y \longrightarrow -y$$

와 같이 치환한 함수이다. 즉, $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 함수이다.

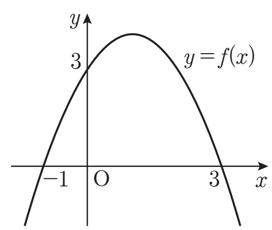


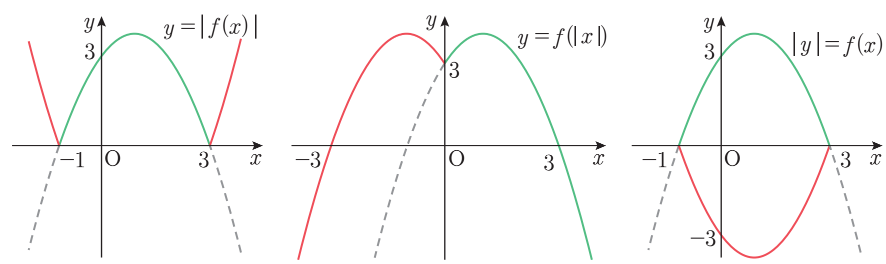
예시

이차함수

$$f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$$

의 그래프에 대하여 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$와 도형 $|y|=f(x)$의 그래프를 각각 그리면 다음과 같다.





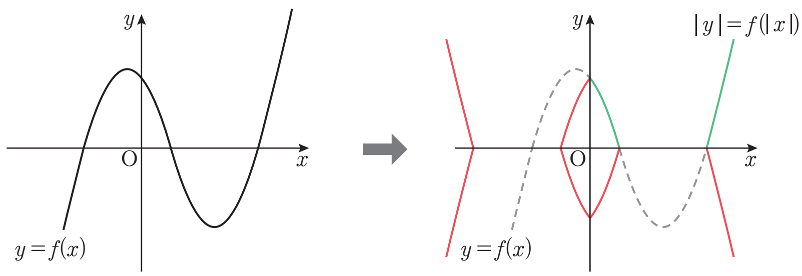
함수 $y=|f(x)|$의 그래프 함수 $y=f(|x|)$의 그래프 도형의 방정식 $|y|=f(x)$

$|y|=f(|x|)$가 나타내는 도형

$|y|=f(|x|)$가 나타내는 도형을 그리기 위해 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값들을 기준으로 범위를 나누면

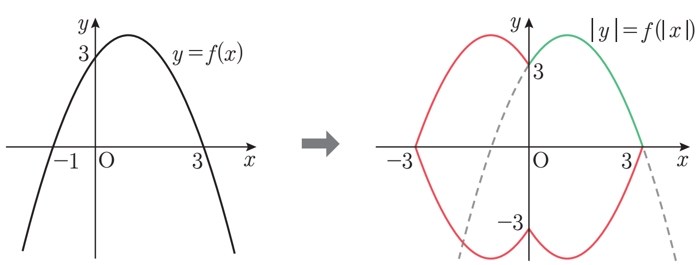
$$\begin{cases} y=f(x) & (x\geq 0,\ y\geq 0) \\ y=-f(x) & (x\geq 0,\ y<0) \\ y=f(-x) & (x<0,\ y\geq 0) \\ y=-f(-x) & (x<0,\ y<0) \end{cases}$$

이다. 이때 함수 $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 그린 후 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.



예 시

이차함수 $f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$의 그래프에 대하여 $|y|=f(|x|)$가 나타내는 도형은 다음과 같다.



$y=-f(-x)$

함수 $y=-f(-x)$는 함수 $y=f(x)$를

$$x \longrightarrow -x,\quad y \longrightarrow -y$$

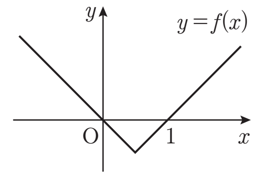
와 같이 치환한 함수이다. 즉, $y=f(x)$를 원점에 대하여 대칭이동한 함수이다.

절댓값 기호를 포함한 식의 그래프

예제 06 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 방정식을 좌표평면 위에 나타내시오.

(1) $y=|f(x)|$　　(2) $y=f(|x|)$

(3) $|y|=f(x)$　　(4) $|y|=f(|x|)$



길잡이 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프는 절댓값 기호 안의 식이 0이 되는 값을 기준으로 범위를 나누어 그린다.

풀 이

- 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프(p.466)
- 도형의 대칭이동(p.456)

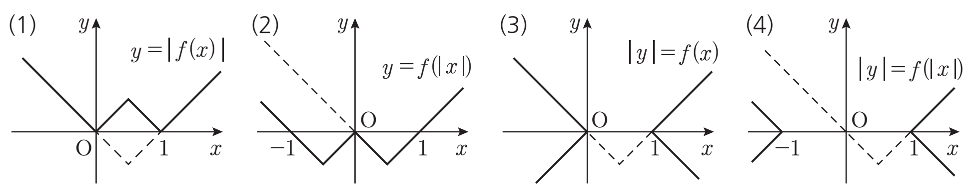
(1) 도형 $y=|f(x)|$는 함수 $y=f(x)$를 그린 후 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

(2) 도형 $y=f(|x|)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x\ge 0$인 부분만 그린 후, $x<0$인 부분은 $x\ge 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

(3) 도형 $|y|=f(x)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $y\ge 0$인 부분만 그린 후, $y<0$인 부분은 $y\ge 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

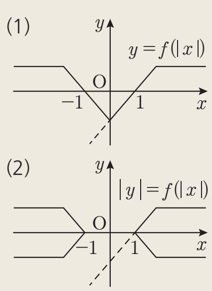
(4) 도형 $|y|=f(|x|)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분만 그린 후 $x\ge 0$, $y\ge 0$인 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하여 그린다.

정답 그림 참조



돌다리 두드리기

|답|



돌다리 두드리기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 방정식을 좌표평면 위에 나타내시오.

(1) $y=f(|x|)$　　(2) $|y|=f(|x|)$

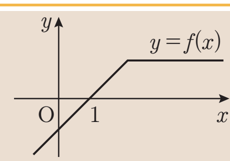


그림 참조

정답 및 풀이 p.579

개념 더하기

유제 06-1

+ 도형의 평행이동(p.451)
+ 축에 평행한 직선의 방정식(p.378)

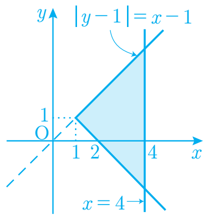
좌표평면에서 방정식 $|y-1|=x-1$이 나타내는 도형과 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

방정식 $|y-1|=x-1$이 나타내는 도형은 $|y|=x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형이다. 도형 $|y-1|=x-1$과 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠한 부분과 같고, 도형 $|y-1|=x-1$이 직선 $x=4$와 만나는 점의 좌표는

$$|y-1|=4-1=3 \quad \Rightarrow \quad y=-2 \text{ 또는 } y=4$$

에서 각각 $(4,\ -2)$와 $(4,\ 4)$이다. 즉, 구하는 영역은 세 점

$$(1,\ 1),\ (4,\ -2),\ (4,\ 4)$$



를 꼭짓점으로 하는 삼각형으로 밑변의 길이가 6이고 높이가 3이다. 따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$$

답 9

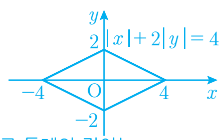
개념 그대로

유제 06-2

도형 $|x|+2|y|=4$의 둘레의 길이를 구하시오.

직선 $x+2y=4$의 $x\ge 0,\ y\ge 0$인 부분은 점 $(4,\ 0)$과 점 $(0,\ 2)$를 이은 선분이다. 따라서 $|x|+2|y|=4$가 나타내는 도형을 그리면 그림과 같이

$$(4,\ 0),\ (0,\ 2),\ (-2,\ 0),\ (0,\ -4)$$



를 네 꼭짓점으로 하는 마름모이다. 마름모의 한 변의 길이는 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 이므로 둘레의 길이는

$$4\times 2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$$

답 $8\sqrt{5}$

개념 더하기

유제 06-3

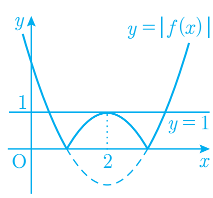
+ 이차함수의 표준형(p.191)
+ 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계(p.194)

좌표평면에서 함수 $f(x)=x^2-4x+3$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 세 점에서만 만날 때, 상수 k의 값을 구하시오.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\ge 0$인 부분을 그대로 두고 $y<0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이다. 이때 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 세 점에서 만나려면 이 직선이

$$y=-f(x)=-(x-2)^2+1$$

의 꼭짓점 즉, 점 $(2,\ 1)$을 지나야 하므로 구하는 값은 $k=1$이다.



답 1

13-1 평행이동 [1-4]

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+5,\ y+3)$에 의하여 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ 2)$가 각각 두 점 A', B'으로 옮겨질 때, 두 점 A', B'을 지나는 직선의 방정식은 $ax+by=20$이다. 이때 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+5,\ y+3)$에 의하여

$$\mathrm{A}(1,\ 4) \longrightarrow \mathrm{A}'(1+5,\ 4+3)$$
$$\mathrm{B}(5,\ 2) \longrightarrow \mathrm{B}'(5+5,\ 2+3)$$

과 같이 **평행이동(p.450)**한다. 따라서 두 점 $\mathrm{A}'(6,\ 7)$, $\mathrm{B}'(10,\ 5)$를 지나는 **직선의 방정식(p.379)**은

$$y-7=\frac{5-7}{10-6}(x-6) \quad \Rightarrow \quad x+2y=20$$

이므로 $a=1$, $b=2$에서 $a+b=3$이다.

답 3

13-2

점 $(-1,\ 5)$를 점 $(3,\ 1)$로 옮기는 평행이동에 의하여 곡선 $y=x^2+4x+a$가 원점을 지나는 곡선으로 이동한다고 할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

점 $(-1,\ 5)$를 점 $(3,\ 1)$로 옮기는 **평행이동(p.450)**은

$$(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y-4)$$

이다. 이때 곡선 $y=x^2+4x+a$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 **평행이동(p.451)**하면

$$y+4=(x-4)^2+4(x-4)+a$$
$$y=x^2-4x+a-4$$

이고 이 곡선이 원점을 지나므로 $0=a-4$에서 $a=4$이다.

답 4

13-3

[보기]의 직선 중에서 평행이동에 의하여 직선 $2x-y-3=0$과 겹쳐질 수 있는 것만을 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. x절편이 -2, y절편이 2인 직선

ㄴ. 두 점 $(-1,\ -3)$, $(3,\ 5)$를 지나는 직선

ㄷ. 점 $(0,\ 1)$을 지나고 직선 $x+2y+4=0$에 수직인 직선

직선 $2x-y-3=0$을 표준형으로 변형하면 $y=2x-3$이고, 기울기가 2임을 알 수 있다. 직선을 평행이동하면 기울기는 변하지 않는다. 따라서 ㄱ,ㄴ,ㄷ 중에서 평행이동하여 이 직선과 겹쳐질 수 있는 것은 기울기가 2인 직선이다.

ㄱ. (거짓) x절편이 -2, y절편이 2인 직선은 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 직선이므로 기울기가 $\frac{2-0}{0+2}=1$이다.

ㄴ. (참) 두 점 $(-1,\ -3)$, $(3,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{5+3}{3+1}=2$이다.

ㄷ. (참) 직선 $x+2y+4=0$을 표준형으로 변형하면 $y=-\frac{1}{2}x-2$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 주어진 직선과 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

13-4

직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=x^2+6x$의 그래프와 접하였다. 이때 상수 k의 값을 구하시오.

직선 $y=2x+1$을 x축의 방향으로 k만큼 **평행이동(p.451)**하면

$$y=2(x-k)+1=2x-2k+1$$

이다. 이때 이 직선이 이차함수 $y=x^2+6x$의 그래프와 접하므로 이차방정식

$$x^2+6x=2x-2k+1 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+2k-1=0$$

의 **판별식(p.166)**을 D라 했을 때

$$\frac{D}{4}=2^2-(2k-1)=-2k+5=0$$

이다. 따라서 $k=\frac{5}{2}$이다.

답 $\frac{5}{2}$

13-5 대칭이동 [5-10]

점 $\mathrm{P}(a,\ -6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A, y축에 대하여 대칭이동한 점을 B, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1,\ b)$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

점 $\mathrm{P}(a,\ -6)$을 x축, y축, 원점에 대하여 **대칭이동(p.455)**한 점의 좌표는 각각

$$\mathrm{A}(a,\ 6),\quad \mathrm{B}(-a,\ -6),\quad \mathrm{C}(-a,\ 6)$$

이고 삼각형 ABC의 **무게중심(p.365)**의 좌표가 $(-1,\ b)$이므로

$$\frac{a-a-a}{3}=-1,\quad \frac{6-6+6}{3}=b$$

이다. 따라서 $a=3$, $b=2$이므로 구하는 값은 $a+b=3+2=5$이다.

답 5

13-6

원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심이 직선 $y=-2x+k$ 위에 있을 때, 상수 k의 값을 구하시오.

원(p.412)을 직선 $y=-x$에 대하여 **대칭이동(p.455)**하면, 원의 중심 $(1,\ -2)$가 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점 $(2,\ -1)$로 이동한다. 이 점이 직선 $y=-2x+k$ 위에 있으므로 $-1=(-2)\cdot 2+k$에서 $k=3$이다.

답 3

13-7

직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동하면 점 $(1, -1)$을 지난다고 한다. 이때 상수 k의 값을 구하시오.

$y=2x+k$를 x축의 방향으로 2만큼 **평행이동(p.451)**한 직선의 방정식은

$$y=2(x-2)+k \quad \Rightarrow \quad y=2x-4+k$$

이다. 이것을 y축에 대하여 **대칭이동(p.456)** 하면

$$y=-2x-4+k$$

이고 이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

$$-1=-2-4+k=-6+k$$

이다. 따라서 $k=5$이다.

답 5

13-8

원 $x^2+y^2-2x+6y+a=0$을 점 $(2, b)$에 대하여 대칭이동한 원이 $(x-c)^2+(y-3)^2=9$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.

주어진 원의 방정식 $x^2+y^2-2x+6y+a=0$을 **표준형(p.412)**으로 고치면

$$(x-1)^2+(y+3)^2=10-a$$

이므로 중심이 $(1, -3)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10-a}$인 원이다. 원의 중심 $(1, -3)$을 점 $(2, b)$에 대하여 대칭이동한 점이 $(c, 3)$이므로

$$\frac{1+c}{2}=2, \quad \frac{-3+3}{2}=b$$

에서 $b=0$, $c=3$이다. 또한 원을 **대칭이동(p.456)**하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $10-a=9$에서 $a=1$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b+c=1+0+3=4$이다.

답 4

13-9

모눈종이 위의 한 점 $(1, 3)$과 점 $(5, -1)$이 겹치도록 종이를 접을 때, 점 $(5, -3)$과 겹치는 점의 좌표를 구하시오.

직선 $y=ax+b$를 따라 접었다고 하면 점 $(1, 3)$은 점 $(5, -1)$과 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이라고 할 수 있다. 따라서 두 점 $(1, 3)$, $(5, -1)$을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$, 즉 $(3, 1)$은 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$1=a\cdot 3+b \qquad \cdots ㉠$$

이다. 또한, 두 점 $(1, 3)$, $(5, -1)$을 지나는 **직선(p.379)**과 직선 $y=ax+b$가 수직이어야 한다. 두 점을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-1-3}{5-1}=-1$이므로 **두 직선이 서로 수직일 조건(p.391)**에 의해 $a=1$임을 알 수 있다. $a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$이다. 이때, 점 $(5, -3)$과 겹치는 점을 (c, d)라 하면 두 점 $(5, -3)$, (c, d)는 직선 $y=x-2$에 대하여 **대칭(p.456)**이므로 **중점(p.363)** $\left(\frac{5+c}{2}, \frac{-3+d}{2}\right)$가 직선 $y=x-2$를 지나고, 두 점 $(5, -3)$, (c, d)를 지나는 직선의 기울기 $\frac{-3-d}{5-c}$가 -1이므로

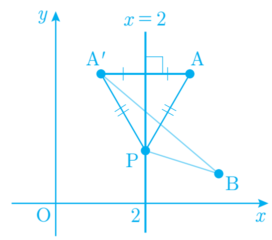
$$\frac{-3+d}{2}=\frac{5+c}{2}-2, \quad \frac{-3-d}{5-c}=-1$$

의 두 식을 **연립(p.249)**하여 풀면 $c=-1$, $d=3$이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 3)$이다.

답 $(-1, 3)$

13-10

두 점 $\mathrm{A}(3, 4)$, $\mathrm{B}(4, 1)$과 직선 $x=2$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하시오.



점 $\mathrm{A}(3, 4)$를 직선 $x=2$에 대하여 **대칭이동(p.455)**한 점을 $\mathrm{A}'(a, b)$라 할 때,

$$\frac{3+a}{2}=2, \quad \frac{4+b}{2}=4$$

이므로 $a=1$, $b=4$이다. 이때, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

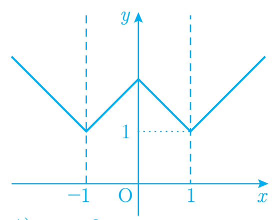
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}\\&=\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2}\\&=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $3\sqrt{2}$이다.

답 $3\sqrt{2}$

13-11 절댓값 기호를 포함한 식의 그래프 [11-12]

함수 $y=|x+1|-|x|+|x-1|$의 그래프를 그리고, 이 함수의 최솟값을 구하시오.



함수 $y=|x+1|-|x|+|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식을 0으로 하는 값은 $x=-1$, 0, 1이므로 이를 기준으로 x의 값의 범위를 나눌 수 있다.

(i) $x<-1$일 때,

$$y=-(x+1)+x-(x-1)=-x$$

(ii) $-1\le x<0$일 때,

$$y=(x+1)+x-(x-1)=x+2$$

(iii) $0\le x<1$일 때,

$$y=(x+1)-x-(x-1)=-x+2$$

(iv) $x\ge 1$일 때,

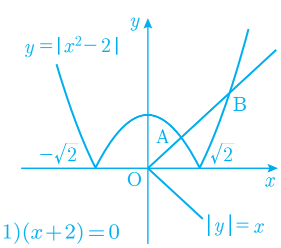
$$y=(x+1)-x+(x-1)=x$$

(i)~(iv)에서 함수 $y=|x+1|-|x|+|x-1|$의 그래프는 그림과 같고, 최솟값은 1이다.

답 1

13-12

두 도형 $y=|x^2-2|$, $|y|=x$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.



도형 $y=|x^2-2|$는 포물선 $y=x^2-2$에서 $y<0$인 부분만 x축에 대하여 **대칭이동(p.456)**하고, 도형 $|y|=x$는 직선 $y=x$에서 $y\ge 0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동한다. 따라서 두 **도형(p.466)**은 그림과 같다. A의 x좌표가 B의 x좌표보다 작다고 하자.

(i) 점 A는 $0<x<\sqrt{2}$에서 직선 $y=x$와 $y=-x^2+2$가 만나는 점이므로

$$x=-x^2+2 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0$$

에서 점 A의 x좌표는 1이고 y좌표는 1이다. 즉 $\mathrm{A}(1, 1)$이다.

(ii) 점 B는 $x\ge\sqrt{2}$에서 직선 $y=x$와 $y=x^2-2$가 만나는 점이므로

$$x=x^2-2 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$$

에서 점 B의 x좌표는 2이고 y좌표는 2이다. 즉 $\mathrm{B}(2, 2)$이다.

(i), (ii)에 의하여 $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(2, 2)$이므로 구하는 값은

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

13-1

직선 $(k+2)x+(k-5)y-7k=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 이 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 원 $(x-13)^2+(y-2)^2=4$의 넓이를 이등분하는 직선이 된다. 이때 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

$(k+2)x+(k-5)y-7k=0$에서

$$(x+y-7)k+(2x-5y)=0$$

이므로, 이 직선은 k의 값에 **관계없이(p.381)** 두 직선 $x+y-7=0$, $2x-5y=0$의 교점 $(5, 2)$를 지나는 **직선(p.393)**이다. 따라서, 이 직선을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 **평행이동(p.451)**한 후 $y=x$에 대하여 **대칭이동(p.456)**하면 항상 점 $(2+b,\ 5+a)$를 지나게 된다. 평행이동한 직선이 원 $(x-13)^2+(y-2)^2=4$의 넓이를 항상 이등분하려면 원의 중심 $(13,\ 2)$를 항상 지나야 하므로

$$2+b=13,\quad 5+a=2$$

에서 $a=-3$, $b=11$이다. 그러므로 $a+b=8$이다.

답 8

13-2

직선 $l: y=2x+1$을 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 직선을 m이라 할 때, 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

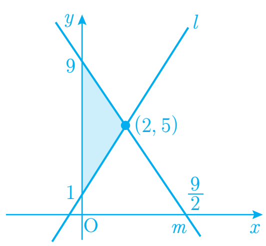
직선 l 위의 점 $(x,\ y)$를 직선 $x=2$에 대하여 **대칭이동(p.455)**한 점을 $(x',\ y')$이라 하면

$$2=\frac{x+x'}{2},\quad y=y'$$

이다. 즉, $x=4-x'$이고 $y=y'$이다. 점 $(x,\ y)$가 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$y'=2(4-x')+1=-2x'+9$$

에서 $m: y=-2x+9$이다. 이때 두 직선 l, m의 교점이 $(2,\ 5)$이고 y절편이 각각 1, 9이므로 두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8=8$이다.



답 8

13-3

원 $(x+3)^2+(y-1)^2=8$을 평행이동 $(x,\ y)\longrightarrow(x-2,\ y+2)$에 의하여 옮긴 다음 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C라 하자. 원 C가 직선 $y=x+a$와 만나도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

원 $(x+3)^2+(y-1)^2=8$이 $(x,\ y)\longrightarrow(x-2,\ y+2)$에 의하여 **평행이동(p.451)**한 **원의 방정식(p.412)**은

$$(x+2+3)^2+(y-2-1)^2=8 \quad\Rightarrow\quad (x+5)^2+(y-3)^2=8$$

이다. 이 원을 다시 직선 $y=x$에 대하여 **대칭이동(p.456)**한 원 C의 방정식은

$$C: (x-3)^2+(y+5)^2=8$$

이다. 이때 원 C가 직선 $y=x+a$와 만나려면 원 C의 중심 $(3,\ -5)$와 직선 사이의 **거리(p.400)**가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|3+5+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\le 2\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad |a+8|\le 4$$

가 성립해야 한다. 위의 **절댓값 기호를 포함한 부등식(p.284)**을 풀면

$$-4\le a+8\le 4\quad\Rightarrow -12\le a\le -4$$

이므로 가능한 정수 a의 개수는 9이다.

답 9

13-4

좌표평면 위의 세 점 $(a,\ 5)$, $(1,\ 3)$, $(4,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 T를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 원점에 대하여 대칭이동한 삼각형을 T'이라 하자. 삼각형 T'의 무게중심이 $(-4,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

삼각형 T의 **무게중심(p.365)**을 $\mathrm{G}(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{a+1+4}{3}=\frac{a+5}{3},\quad y=\frac{5+3-2}{3}=2$$

이다. 한편, 삼각형 T'의 무게중심은 삼각형 T의 무게중심을 x축의 방향으로 3만큼 **평행이동(p.450)**한 후, 원점에 대하여 **대칭이동(p.455)**한 점과 같다. 따라서

$$-\frac{a+5}{3}-3=-4,\quad -2=b$$

에서 $a=-2$, $b=-2$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=-4$이다.

답 -4

13-5

도형 $|x|+|y|=10$과 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원과 오직 네 점에서 만날 때, 모든 실수 r의 값의 곱을 구하시오.

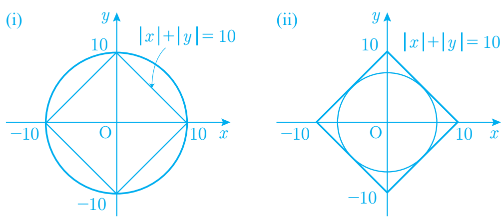
직선 $x+y=10$의 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분의 그래프는 두 점 $(10, 0)$, $(0, 10)$을 잇는 선분을 나타낸다. 따라서 **도형(p.466)** $|x|+|y|=10$의 그래프는 네 점 $(0, 10)$, $(10, 0)$, $(0, -10)$, $(-10, 0)$을 꼭짓점으로 하는 마름모를 나타낸다. 이 도형이 반지름의 길이가 r인 원과 네 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 원이 마름모의 네 꼭짓점을 지나는 경우 또는 원이 마름모에 내접하는 경우 뿐이다.

(i) 원이 네 꼭짓점을 지나는 경우 반지름의 길이가 10이므로 $r=10$이다.

(ii) 원이 마름모에 내접하는 경우 원의 반지름의 길이는 직선 $x+y=10$과 원점과의 **거리(p.401)**와 같으므로

$$r=\frac{|-10|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$$

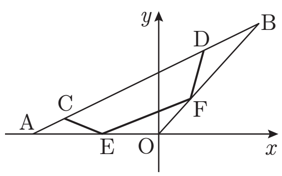
(i), (ii)에 의하여 모든 r의 값의 곱은 $10\times 5\sqrt{2}=50\sqrt{2}$이다.



답 $50\sqrt{2}$

13-6 교육청 기출

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-10, 0)$, $\mathrm{B}(10, 10)$과 선분 AB 위의 두 점 $\mathrm{C}(-8, 1)$, $\mathrm{D}(4, 7)$이 있다. 선분 AO 위의 점 E와 선분 OB 위의 점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 E의 x좌표를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



점 $\mathrm{C}(-8, 1)$을 x축에 대하여 **대칭이동(p.455)**한 점은 $\mathrm{C'}(-8, -1)$이고, 점 $\mathrm{D}(4, 7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{D'}(7, 4)$이다.

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{C'E}}$, $\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{FD'}}$이므로

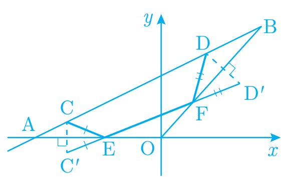
$$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{C'E}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD'}}\geq\overline{\mathrm{C'D'}}$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소일 때는두 점 E, F가 두 점 C′, D′을 지나는 직선 위에 있을 때이다.

두 점 $\mathrm{C'}(-8, -1)$, $\mathrm{D'}(7, 4)$를 지나는 **직선의 방정식(p.379)**은

$$y-4=\frac{1}{3}(x-7) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

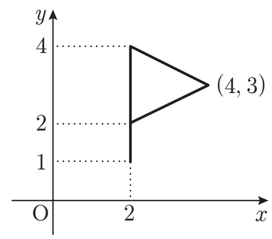
이므로 $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 E의 x좌표는 위 직선의 x절편으로 -5이다.



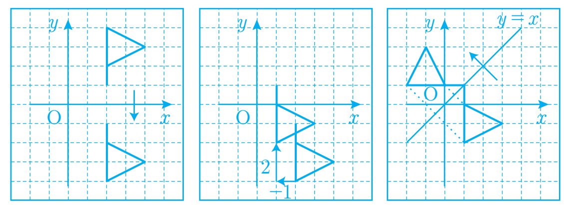
답 -5

13-7

그림과 같은 깃발 모양의 도형을 x축에 대하여 대칭이동하고 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 평행이동한 후의 도형을 좌표평면 위에 나타내시오.



주어진 도형을 **대칭이동(p.456)** 및 **평행이동(p.451)**한 후를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.

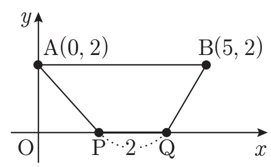


x축 대칭 x축으로 -1, y축으로 2 $y=x$ 대칭

답 풀이 참조

13-8

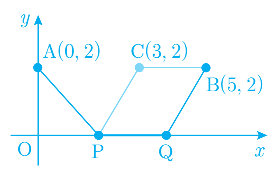
좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(5, 2)$가 있다. 길이가 2인 선분 PQ가 x축 위에서 움직일 때, 사각형 APQB의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.



점 $\mathrm{B}(5, 2)$를 x축 방향으로 -2만큼 **평행이동(p.450)**한 점을 $\mathrm{C}(3, 2)$라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}+\overline{\mathrm{BA}}$$
$$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{BA}}$$

이다. $\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2$, $\overline{\mathrm{BA}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PC}}$의 값이 최소일 때, 사각형 APQB의 둘레의 길이가 최소가 된다. 이때, 점 $\mathrm{A}(0, 2)$를 x축에 대하여 **대칭이동(p.455)**한 점을 $\mathrm{A'}(0, -2)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PC}}$의 최솟값은



$$\overline{\mathrm{A'C}}=\sqrt{3^2+(2+2)^2}=5$$

이다. 따라서 사각형 APQB의 둘레의 길이의 최솟값은 $2+5+5=12$이다.

답 12

수학(상) 제04회
〈Ⅲ도형의 방정식〉

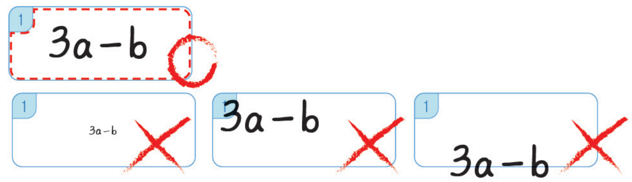
10.평면좌표 | 11.직선의 방정식 | 12.원의 방정식 | 13.도형의 이동

성명		수험번호	0	1	0	-					-				

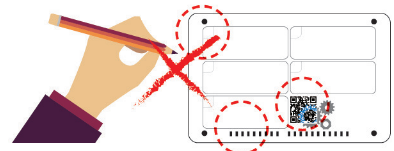
○ 답안지의 해당 번호란에 반듯한 필체로 답을 작성해주세요. 답안 인식 범위는 빨간 선 내부입니다. 선을 벗어나거나 글자가 작은 경우 인식률이 떨어집니다.

예)

잘못된 예)



○ 답안지의 모서리에 위치한 네 점과 하단의 검정박스, QR코드는 답안을 인식하는 좌표이므로 훼손하지 마세요.



○ 문항에 따라 배점이 다르니 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고해주세요.

○ 채점과 정답 및 해설 확인, 진단평가에 따른 치료문제는 마타수학 앱을 통해 확인하실 수 있습니다.

1

① 구글 플레이, 애플 앱 스토어에서 "마타수학"을 검색하거나 QR코드를 스캔하여 앱을 설치하세요.

2

② 어플을 실행시켜 메뉴바의 QR 카메라 버튼을 누르세요.

3

③ 답안의 검정색 원을 촬영범위에 맞추고 촬영버튼을 누르세요.

4

④ 필기한 답안들이 OCR기술로 자동 인식되어 나타납니다.

수학(상) 제04회 〈Ⅲ도형의 방정식〉

10.평면좌표 ¦ 11.직선의 방정식 ¦ 12.원의 방정식 ¦ 13.도형의 이동

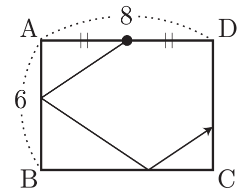
제한시간 30분

1. 원 $x^2+y^2=8$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 직선 $x-2y+3=0$에 접하였을 때, 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [2점]

2. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 6)$, $\mathrm{B}(7,\ 4)$를 이은 선분 AB의 수직이등분선이 점 $\mathrm{C}(2,\ 1)$을 지날 때, 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [2점]

3. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, $\mathrm{B}(3,\ -1)$, $\mathrm{C}(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(2,\ 0)$일 때, 선분 BC를 $1:2$로 외분하는 점 P의 x좌표와 y좌표의 합을 구하시오. [2점]

4. 그림과 같은 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}=8$인 직사각형 ABCD에서 변 AD의 중점에서 출발하여 변 AB, 변 BC를 거쳐 변 CD를 $1:2$로 내분하는 점에 이르는 최단 거리를 구하시오. [3점]



5. 동서방향과 남북방향의 두 직선도로가 지점 O에서 수직으로 만나고 있다. 수영이는 자전거를 타고 지점 O로부터 북쪽으로 20 km만큼 떨어진 지점에서 남쪽방향으로 시속 8 km로 달리고 있고, 하영이는 자전거를 타고 지점 O에서 동쪽방향으로 시속 6 km로 달리고 있다. 두 사람이 동시에 출발하여 달릴 때, 출발 후 두 사람의 거리가 가장 가까울 때의 거리를 d km라 하면 d의 값을 구하시오. (단, 도로의 너비는 생각하지 않는다.) [3점]

-제 ④ 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

1

4

2

5

3

VITRUV

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

수학(상) 제04회 〈Ⅲ도형의 방정식〉

10.평면좌표 ¦ 11.직선의 방정식 ¦ 12.원의 방정식 ¦ 13.도형의 이동

/30점

6. 원 $(x+a)^2+y^2=a^2$이 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$의 둘레를 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

7. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여

$$\sqrt{(a-12)^2+(b-5)^2}$$

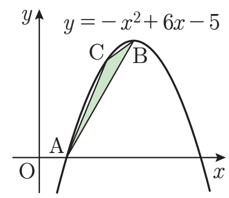
의 최댓값을 구하시오. [3점]

8. 점 A는 직선 $y=2x+3$ 위에 있고, 점 B는 직선 $y=2x-2$ 위에 있다. 선분 AB는 두 직선과 수직이고, 삼각형 OAB의 넓이가 10일 때, 직선 AB의 방정식을 $x+ay+b=0$이라 하자. $a-b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 점 A, B는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

9. 그림과 같이 이차함수

$$y=-x^2+6x-5$$

의 그래프 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하시오. (단, $1<a<3$) [4점]



10. 원 $x^2+y^2-2ax-4ay+10a-9=0$의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심을 지나면서 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 직선의 방정식 중 좌표축과 평행하지 않은 직선을 구하시오. (단, a는 실수이다.) [4점]

-제 ④ 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

6	9
7	10
8	

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

빠른 정답

10 평면좌표

유 제 p.355

01-1 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
2 $-\frac{3}{2}$
3 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
02-1 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형
2 $C\left(\frac{5}{4}, 0\right)$
3 $a=3$, $b=3+2\sqrt{3}$
03-1 $\sqrt{85}$
2 13
3 P(3, 6), 최솟값: 70
04-1 13
2 $4\sqrt{10}$
3 $(3, -1)$
05-1 $C(-8, 3)$
2 $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$
3 $\left(\frac{35}{36}, \frac{41}{36}\right)$
06-1 $D(-1, 8)$
2 $D\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
3 $D(4, 3)$

연습은 실전처럼 p.372

10-1 $a=3$ 또는 $a=7$
2 $B(1, -1)$
3 23
4 $P(4, -1)$
5 $6\sqrt{2}$
6 ㄱ, ㄴ
7 7
8 25
9 $D(2, 8)$
10 $\frac{15}{2}$
11 $C(5, 1)$
12 삼각형 ABC의 무게중심

실전은 연습처럼 p.374

10-1 $D(-4, 6)$
2 $(2, -1)$
3 $\frac{3}{8}<t<\frac{7}{15}$
4 6
5 16
6 16
7 4
8 $\frac{56}{3}$

11 직선의 방정식

유 제 p.383

01-1 $y=-2x+9$
2 $\frac{13}{4}$
3 24
02-1 제4사분면
2 제1, 3, 4사분면
3 제1, 2, 3사분면
03-1 $y=x-2$
2 $m=\frac{3}{2}$
3 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$
04-1 (1) $P(-2, 1)$ (2) $P(2, -5)$
2 $0\le m\le 1$
3 $-\frac{1}{4}\le k\le 2$
05-1 (1) $y=-2x+4$ (2) $y=-2x+8$
2 $a=1$, $b=-2$
3 $y=2x+6$
06-1 $a=-2$ 또는 $a=3$
2 18
3 1

07-1 (1) $x=\frac{9}{5}$ (2) $y=\frac{8}{5}$

2 $-\frac{3}{2}$

3 $\frac{4}{7}$

08-1 (1) P$(-2,\ 0)$ 또는 P$(10,\ 0)$

(2) $a=-20$ 또는 $a=20$

2 $2x+y-8=0$ 또는 $2x-y=0$

3 $a=-2$ 또는 $a=8$

09-1 $a=-3$ 또는 $a=\frac{7}{3}$

2 풀이 참조

3 10

연습은 실전처럼 p.406

11-1 -3

2 $y=-x+5$

3 3

4 $-1<m<0$

5 C$(-7,\ 1)$

6 -8

7 $\frac{8}{3}$

8 $-\frac{4}{3}$

9 2

10 $k=1$ 또는 $k=-49$

11 $\frac{25}{4}$

12 5

실전은 연습처럼 p.408

11-1 -3

2 12

3 $y=-\frac{1}{2}x+3$

4 $3x-4y-6=0$

5 $\sqrt{5}$

6 $0\le m\le 1$

7 48

8 $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$

12 원의 방정식

유 제 p.417

01-1 10π

2 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

3 $\frac{1}{2}$

02-1 16π

2 $4\sqrt{2}$

3 $(x-6)^2+y^2=5$

03-1 8

2 7

3 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

04-1 5

2 최댓값: $2\sqrt{5}+2$, 최솟값: $2\sqrt{5}-2$

3 $\sqrt{5}$

05-1 2

2 $-3\le a\le -1$ 또는 $1\le a\le 3$

3 $(x-3)^2+y^2=4$ 또는 $(x+12)^2+y^2=121$

06-1 $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

2 -4

3 4

07-1 $2\sqrt{5}\pi$

2 $x^2+y^2-2x-2y=0$

3 $y=-\frac{1}{2}$

08-1 $y=-x\pm 4$

2 $\frac{12}{5}$

3 -1

09-1 $5\sqrt{3}$

2 2

3 A$(4,\ -10)$

연습은 실전처럼 p.444

12-1 (1) $x^2+(y-1)^2=4$

(2) $(x-3)^2+(y+4)^2=9$

(3) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

2 $\sqrt{10}$

3 중심: (2, 4), 반지름의 길이: 5

4 $(x-5)^2+(y-5)^2=20$

5 2

6 7

7 $9\sqrt{3}$

8 10

9 $4\sqrt{5}\pi$

10 11

11 $\frac{45}{4}$

12 $\mathrm{P}(-12, 20)$

실전은 연습처럼 p.446

12-1 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$

2 $\frac{9}{4}\pi$

3 $3x-4y+2=0$

4 $\sqrt{2}$

5 $\frac{1}{2}$

6 45

7 $-\frac{11}{4}$

8 3

13 도형의 이동

유 제 p.453

01-1 (1) $y=-3x-4$
(2) $y=x^2+6x+13$
(3) $(x+5)^2+(y-5)^2=4$

2 $a<-2$

3 -1

02-1 (1) 5 (2) 3

2 $y=-3x+5$

3 (1) $(x-2)^2+(y+3)^2=52$ (2) $4\sqrt{2}$

03-1 $2\sqrt{5}$

2 $a=-1$ 또는 $a=3$

3 $a=3,\ b=5$

04-1 $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{2}{3}$

2 $6\sqrt{2}$

3 $y=\frac{1}{2}x+2$

05-1 $a=-4$ 또는 $a=2$

2 $\sqrt{10}$

3 $\sqrt{13}$

06-1 9

2 $8\sqrt{5}$

3 1

연습은 실전처럼 p.472

13-1 3

2 4

3 ㄴ, ㄷ

4 $\frac{5}{2}$

5 5

6 3

7 5

8 4

9 $(-1, 3)$

10 $3\sqrt{2}$

11 1

12 $\sqrt{2}$

실전은 연습처럼 p.474

13-1 8

2 8

3 9

4 -4

5 $50\sqrt{2}$

6 -5

7 풀이 참조

8 12